# Algebra liniowa 2 R. Lista 11

$Q$ jest zwykle formą kwadratową na skończenie wymiarowej przestrzeni $V$, a $\varphi$ formą dwuliniową. Wektor $v \in V$ nazywamy *izotropowym*, jeśli $Q(v) = 0$. Zakładamy, że $1 + 1 \neq 0$. Forma kwadratowa na rzeczywistej przestrzeni liniowej jest dodatnio/ujemnie półokreślona, jeśli jest nieujemna/niedodatnia na każdym wektorze, a ujemnie określona, jeśli $Q(v) < 0$ dla $v \neq 0$.

Zadania o formach kwadratowych łatwo się tłumaczą na zadania o formach symetrycznych (ale zwykle jest wtedy więcej pisania) — jeżeli wolisz, możesz je rozwiązywać w tej formie.

**Zadanie 1.** Zastosuj ortogonalizację Grama-Schmidta (względem standardowego iloczynu skalarnego) do trójki $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.

**Zadanie 2.** Znajdź bazę $\mathbf{R}^2$ ortonormalną względem formy zadanej przez $\begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 2\end{pmatrix}$.

**Zadanie 3.** Udowodnij że dla dowolnej symetrycznej formy dwuliniowej $\varphi$ mamy $\operatorname{Lin} A \subseteq A^{\perp\perp}$, a jeżeli $\varphi$ jest dodatnio określona, to zachodzi równość.

**Zadanie 4.** Znajdź $m^{BB}(Q)$ dla $Q((x,y,z)^\top) = x^2+5xy+3yz+yx-2z^2$ i $B = ((1,0,1)^\top, (-1,-1,1)^\top, (0,1,3)^\top)$.

**Zadanie 5.** Sprowadź podane formy do postaci diagonalnej (np. metodą Lagrange'a) i wyznacz ich sygnatury.

a) $x_1x_2 + x_2^2$,
b) $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + 5x_3^2$,
c) $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_3^2$,
d) $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1$,
e) $\sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{1\le i<j\le n} x_ix_j$.

**Zadanie 6.** Dla jakich wartości $\lambda$ następujące formy są dodatnio określone:

a) $5x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$;
b) $2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 2x_1x_3$;
c) $x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$;
d) $x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 10x_1x_3 + 6x_2x_3$;

**Zadanie 7.**

a) Uzasadnij, że obcięcie formy kwadratowej do podprzestrzeni jest formą kwadratową.
b) Ogólniej, uzasadnij, że jeśli $F : W \to V$ jest liniowe, zaś $Q\colon V \to K$ jest formą kwadratową, to $Q \circ F : W \to K$ jest formą kwadratową.
c) Zrób to samo dla form dwuliniowych (sprawdź też, że zachowuje się symetryczność i dodatnia określoność).

**Zadanie 8.** Wyznacz symetryczną formę dwuliniową związaną z formą kwadratową $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$.

---

**Zadanie 9.** Załóżmy że $A, B$ są symetrycznymi macierzami rzeczywistymi. Uzasadnij że $AB$ jest symetryczna wtedy i tylko wtedy gdy $AB = BA$.

**Zadanie 10.** Rozważmy formę symetryczną $\varphi$. Czy jest prawdą, że wartości własne macierzy $m^{BB}(\varphi)$ nie zależą od wyboru bazy $B$?

**Zadanie 11.** Na przestrzeni $V = \mathbf{R}_n[x]$ rozważamy formę symetryczną $\varphi(P,Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)\,dt$. Znajdź bazę ON $V$, gdy:

a) $n = 1$, b) $n = 2$, c) $n = 3$.

**Zadanie 12.** Czy jest prawdą, że symetryczna rzeczywista macierz $A$ jest dodatnio półokreślona (tzn. $(\forall X)(X^\top AX \geq 0)$) wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie jej wiodące minory główne są nieujemne?

**Zadanie 13.** Podaj kryterium ujemnej określoności rzeczywistej macierzy analogiczne do kryterium Sylvestera.

**Zadanie 14.** Pokaż że jeśli $\varphi$ jest niedegenerowaną symetryczną formą dwuliniową na (skończenie wymiarowej) zespolonej przestrzeni liniowej $V$, to istnieje taka baza $B$, że $m^{BB}(\varphi) = \mathrm{I}$. *Wskazówka: naśladuj proces Grama-Schmidta, lub użyj tw. Lagrange'a o diagonalizacji.*

**Zadanie 15.** Wywnioskuj z poprzedniego zadania, że każda symetryczna odwracalna zespolona macierz $A$ jest postaci $PP^\top$ dla pewnej macierzy odwracalnej $P$.

**Zadanie 16.**

a) Znajdź przykład symetrycznej formy dwuliniowej $\varphi$ na $\mathbf{R}^3$ i baz $B = (b_1, b_2, b_3), C = (c_1, c_2, c_3)$ takich że
$$m^{BB}(\varphi) = m^{CC}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
ale $b_1$ i $c_1$ ani $b_2$ i $c_2$ nie są współliniowe.

b) Rozstrzygnij czy dla $B, C$ jak w poprzednim podpunkcie $b_3, c_3$ muszą być współliniowe.

---

**Zadanie 17.** Załóżmy, że funkcja $Q : V \to K$ spełnia warunki: (a) $(v, w) \mapsto \frac{1}{2}(Q(v+w) - Q(v) - Q(w))$ jest formą dwuliniową; (b) $(\forall v \in V)(Q(-v) = Q(v))$. Udowodnij, że $Q$ jest formą kwadratową. Czy warunek (b) jest istotny?

**Zadanie 18.** Uzasadnij, że rzeczywista forma kwadratowa jest dodatnio półokreślona wtedy i tylko wtedy, gdy jej macierz da się zapisać w postaci $M^\top M$ dla pewnej macierzy $M$. Możliwie podobnym warunkiem scharakteryzuj macierze dodatnio określone.

**Zadanie 19.** Załóżmy, że zbiór wektorów izotropowych jest podprzestrzenią. Wykaż, że wtedy (a) $Q$ jest półokreślona; (b) jeśli $v, w \in V$, przy czym $v$ jest wektorem izotropowym, to $Q(v, w) = 0$.

**Zadanie 20.** Niech $Q$ będzie formą kwadratową na przestrzeni $R_n[X]$. Czy zawsze istnieje $W \in \mathbf{R}_n[X]$, taki że dla każdego $P \in \mathbf{R}_n[X]$ zachodzi $Q(P) = \int_0^1 P(x)^2 W(x) dx$?

**Zadanie 21.** Ze skończonym grafem (niezorientowanym, bez krawędzi wielokrotnych, bez pętli), wiążemy macierz $(a_{ij})$: numerujemy wierzchołki grafu i kładziemy $a_{ij} = -1$ jeśli $i$-ty i $j$-ty wierzchołek są połączone krawędzią, $a_{ij} = 0$ jeśli nie są, oraz $a_{ii} = 2$ dla każdego $i$. Znajdź wszystkie grafy dla których dostaje się dodatnio określoną macierz.