

$$d) \begin{pmatrix} 6 & -9 & 5 & 4 \\ 7 & -13 & 8 & 7 \\ 8 & -17 & 11 & 8 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad e) \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & 2 & -2 \\ -3 & 1 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Zadanie 12. Pokaż, że jeśli $A \in M_{n \times n}(K)$ spełnia $Av = \lambda v$, to dla $W(X) \in K[X]$ zachodzi $W(A)v = W(\lambda)v$.

Zadanie 13. Co wiadomo o postaci Jordana zespolonej macierzy A , jeśli: (a) $A^2 = I$; (b) $A^2 = A$; (c) $A^2 = A^3$?

Zadanie 14. Niech $F : V \rightarrow W$. Uzasadnij, że można dobrać bazy: B przestrzeni V i C przestrzeni W , tak aby $m_C^B(F)$ miała jedynki na miejscach $(1, 1), (2, 2), \dots, (k, k)$ (gdzie $k = \text{rk}(F)$), a zera na wszystkich pozostałych miejscach. Wywnioskuj, że jeśli $A \in M_{n \times m}(K)$, to istnieją odwracalne macierze $P \in M_{n \times n}(K)$, $Q \in M_{n \times n}(K)$, takie że $PAQ^{-1} \in M_{n \times m}(K)$ jest diagonalna (tzn. ma niezerowe wyrazy tylko na głównej przekątnej).

Zadanie 15. Udowodnij, że dla dowolnych $A, B \in M_{n \times n}(\mathbf{R})$ zachodzi $\chi_{AB}(x) = \chi_{BA}(x)$.

Zadanie 16. Niech $N \in M_{n \times n}(\mathbf{C})$ będzie nilpotentna. Czy każdy niezerowy wektor z \mathbf{C}^n jest elementem pewnej bazy jordanowskiej N ?

Zadanie 17. Niech A będzie macierzą 10×10 spełniającą $A^3 = 0$, zaś B niech będzie macierzą 10×10 której każdy wyraz jest równy 1. Udowodnij, że $\det(A + B) = 0$.

Zadanie 18. Udowodnij, że dowolne dwie odwracalne macierze zespolone tego samego rozmiaru można połączyć ciągłą krzywą odwracalnych macierzy zespolonych. Innymi słowy: dla dowolnych odwracalnych $A, B \in M_n(\mathbf{C})$ istnieją ciągłe funkcje $u_{ij} : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$, $w_{ij} : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$, takie że macierz $A(t) = (u_{ij}(t) + iw_{ij}(t)) \in M_n(\mathbf{C})$ jest odwracalna dla każdego $t \in [0, 1]$, a ponadto $A(0) = A$, $A(1) = B$.

(Wskazówka: pokaż, że macierz w postaci Jordana można połączyć z diagonalną, a diagonalną z identycznościową. Następnie rozważ $P^{-1}A(t)P$.)