Algebra liniowa 2 R. Lista 9

Zadanie 1. Znajdź postacie Jordana (najlepiej nie wyznaczając baz jordanowskich) dla macierzy:

a) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$

Zadanie 2. Sprawdź, że przekształcenie $\mathbf{R}_n[X] \ni P \mapsto P' \in \mathbf{R}_n[X]$ jest nilpotentne (tzn. pewna jego potęga jest zerowa). Wyznacz jego postać Jordana i bazę jordanowską.

Zadanie 3. Podaj przykład takiej macierzy $A \in \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbf{F}_2)$ która jest w postaci Jordana, nie diagonalizuje się, ale spełnia $A^N = I$ dla pewnego N. Porównaj to z zadaniem 10 z poprzedniej listy.

Zadanie 4. Niech F będzie endomorfizmem V, zaś B bazą V. Wykaż, że F jest diagonalizowalne $\iff m_B(F)$ jest diagonalizowalna.

Zadanie 5. Wykaż, że jeśli dla $G : V \to V$ mamy $\ker(G^k) = \ker(G^{k+1})$, to $V^0(G) = \ker(G^k)$. Wywnioskuj stąd, że jeśli dla $F : V \to V$ mamy $\ker((F-\lambda)^k) = \ker((F-\lambda)^{k+1})$, to $V^\lambda(F) = \ker((F-\lambda)^k)$.

Zadanie 6. Udowodnij, że jeśli N jest nilpotentnym endomorfizmem V, to liczba klatek $s \times s$ w postaci Jordana N wynosi $2\dim\ker N^s - \dim\ker N^{s-1} - \dim\ker N^{s+1}$. Następnie powiedz czym będzie $\dim\ker F^s - \dim\ker F^{s-1} - \dim\ker F^{s+1}$ dla niekoniecznie nilpotentnego F.

Zadanie 7. Udowodnij, że jeśli $F, G : V \to V$, oraz $F \circ G = G \circ F$, to dowolna (a) przestrzeń własna $V_\lambda(F)$; (b) przestrzeń pierwiastkowa $V^\lambda(F)$; jest G-niezmiennicza.

Zadanie 8. Nie używając twierdzenia Jordana uzasadnij, że $\chi_F(x) = (-x)^n \iff F$ jest nilpotentne (gdzie $F \in \mathrm{End}(V)$, $n = \dim V$).

Zadanie 9. Załóżmy, że k jest liczbą naturalną, a $v \in V$ spełnia $F^k v \neq F^{k+1} v = 0$. Wykaż, że wtedy układ $(v, Fv, F^2 v, \dots, F^k v)$ jest bazą niezmienniczej podprzestrzeni $V^0 \leqslant V$.

Zadanie 10. Wyznacz postacie Jordana i bazy jordanowskie dla macierzy z zadania 11 z listy 8.

Zadanie 11. Podaj przykład macierzy, której wielomian charakterystyczny to $x^2 - 12x + 36$, a wszystkie wektory własne są postaci $t\binom{2}{-3}$, $t \in \mathbf{R}$.

Zadanie 12. Znajdź postać Jordana macierzy A, wiedząc że $\chi_A(x) = (3-x)^4(2+x)$, $\mathrm{rk}(A-3I) = 2$. Czy da się to zrobić, jeśli $\mathrm{rk}(A-3I) = 1, 3, 4$?

Zadanie 13. Rzeczywista macierz A o wielomianie charakterystycznym $\chi_A(x) = (1-x)^5(2-x)$ spełnia:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}, (A-1)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}, (A-1)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Wyznacz postać Jordana i bazę Jordanowską dla A.

Algebra liniowa 2 R. Lista 9

Zadanie 14. Przypomnij sobie, że liczba λ-klatek w postaci Jordana jest równa $\dim V_\lambda$. Niech

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$$

gdzie $a_1, \dots, a_n$ są pewnymi liczbami zespolonymi. Udowodnij, że w postaci Jordana macierzy A każdej wartości własnej odpowiada dokładnie jedna klatka Jordana.

Zadanie 15. Powiąż poprzednie zadanie z faktem, że jeśli mamy (liniowy) wzór rekurencyjny, taki że λ jest dokładnie k-krotnym jego pierwiastkiem równania charakterystycznego, to ciągi $\lambda^n, n\lambda^n, \dots, n^{k-1}\lambda^n$ (lub, jeśli wolisz, $\binom{n}{0}\lambda^{n-0}, \binom{n}{1}\lambda^{n-1}, \dots, \binom{n}{k-1}\lambda^{n-k+1}$) są dokładnie tymi fundamentalnymi rozwiązaniami danej rekurencji, w których występuje λ.

Zadanie 16. W turnieju tenisowym bierze udział 8 zawodników o numerach startowych od 1 do 8. Turniej jest rozgrywany systemem pucharowym. Po turnieju zdefiniowano macierz $A \in M_{8\times 8}(\mathbf{R})$: $a_{ij} = 1$ jeśli i-ty zawodnik grał i wygrał z j-tym; $a_{ij} = 0$ w przeciwnym wypadku. Uzasadnij, że macierz A jest nilpotentna i wyznacz jej postać Jordana.

Zadanie 17.

a) Udowodnij, że dla dowolnych dwóch wielomianów P, Q mamy $P(F) \circ Q(F) = Q(F) \circ P(F)$.

b) Udowodnij, że jeśli $G : V \to V$, $F \circ G = G \circ F$, to dla dowolnego wielomianu P zachodzi $P(F) \circ G = G \circ P(F)$.

Zadanie 18. Z twierdzenia Jordana wywnioskuj twierdzenie Cayleya-Hamiltona, tzn. że dla $A \in M_{n\times n}(K)$, K algebraicznie domknięte, zachodzi $\chi_A(A) = 0$.

Zadanie 19. Udowodnij, że dowolny endomorfizm F zespolonej przestrzeni liniowej można przedstawić w postaci $S + N$, gdzie S, N są liniowe, S jest diagonalizowalne, N jest nilpotentne, oraz $S \circ N = N \circ S$. Czy przedstawienie takie jest jednoznaczne?

Zadanie 20. W założeniach i oznaczeniach poprzedniego zadania: udowodnij, że istnieją wielomiany P, Q, takie że $S = P(F)$, $N = Q(F)$.

Zadanie 21. Niech $A \in M_{n\times n}(\mathbf{C})$. Udowodnij, że $A^n = 0 \iff \mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(A^2) = \ldots = \mathrm{tr}(A^n) = 0$.