

Zadanie 1. Załóżmy, że $f \circ g$ jest monomorfizmem. Czy f musi być monomorfizmem? Czy g musi być monomorfizmem?

Zadanie 2. Jak w poprzednim zadaniu, tylko dla epimorfizmów.

Niech $\mathcal{C}$ będzie kategorią, a A, B będą jej obiektami. *Produkt* $A \times B$ to obiekt $\mathcal{C}$ wraz z morfizmami $\pi_A: A \times B \rightarrow A$, $\pi_B: A \times B \rightarrow B$, takimi że dla każdego C i morfizmów $f_A: C \rightarrow A$, $f_B: C \rightarrow B$ istnieje jedyny morfizm $g: C \rightarrow A \times B$ taki że następujący diagram jest przemienny:

$$\begin{array}{ccccc} & & C & & \\ & f_A \swarrow & \vdots g & \searrow f_B & \\ A & \xleftarrow{\pi_A} & A \times B & \xrightarrow{\pi_B} & B \end{array}$$

Zadanie 3. Sprawdź, że produkt kartezjański, wraz z rzutami na osie, jest produktem w kategorii zbiorów.

Zadanie 4. Spróbuj rozpoznać, czym są (i czy w ogóle istnieją!) produkty w innych znanych Ci kategoriach.

Zadanie 5. Udowodnij, że w dowolnej kategorii, jeśli produkt A i B istnieje, jest jedyny z dokładnością do izomorfizmu.

Koprodukt A i B to taki obiekt $A \sqcup B$, wraz z morfizmami $i_A: A \rightarrow A \sqcup B$, $i_B: B \rightarrow A \sqcup B$, że dla każdego C i morfizmów $f_A: A \rightarrow C$, $f_B: B \rightarrow C$ istnieje jedyny morfizm $g: A \sqcup B \rightarrow C$, taki że następujący diagram jest przemienny:

$$\begin{array}{ccccc} & & C & & \\ & f_A \swarrow & \uparrow g & \nwarrow f_B & \\ A & \xrightarrow{i_A} & A \sqcup B & \xleftarrow{i_B} & B \end{array}$$

Zadanie 6. Czym są koprodukty w kategorii zbiorów?

Zadanie 7. Czym są (i czy istnieją?) koprodukty w innych znanych Ci kategoriach.

Zadanie 8. Udowodnij że jeśli koprodukt A, B istnieje, to jest jedyny z dokładnością do izomorfizmu.

Niech $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ będą kategoriami. *Funktor* (kowariantny) $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ to przyporządkowanie obiektów $\mathcal{D}$ obiektom $\mathcal{C}$ oraz morfizmów w sposób spójny ze strukturą kategorii.

Formalnie znaczy to że dla dowolnych obiektów A, B, C w kategorii $\mathcal{C}$ zachodzi:

- $F(A)$ jest obiektem w kategorii $\mathcal{D}$,
- $F(\text{id}_A) = \text{id}_{F(A)}$,
- dla $f \in \text{Hom}(A, B)$ mamy $F(f) \in \text{Hom}(F(A), F(B))$,
- dla $f \in \text{Hom}(A, B)$ i $g \in \text{Hom}(B, C)$ mamy $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

Funtor kontrawariantny definiujemy podobnie, z tym że strzałki są odwracane, tzn. dla $f \in \text{Hom}(A, B)$ mamy $F(f) \in \text{Hom}(B, A)$ i $F(f \circ g) = F(g) \circ F(f)$.

Zadanie 9. Sprawdź że następujące przyporządkowania są funktorami (kowariantnymi, czy kontrawariantnymi?). W razie potrzeby dopowiedz, jak te funktory działają na morfizmach.

- odwzorowanie identycznościowe $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$,
- odwzorowanie identycznościowe $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^{op}$, gdzie $\mathcal{C}^{op}$ to ta sama kategoria, ale z odwróconymi strzałkami,
- odwzorowanie stałe z dowolnej kategorii w kategorię z jednym obiektem i jednym morfizmem,
- odwzorowanie stałe z kategorii z jednym obiektem i jednym morfizmem (na dowolny obiekt w dowolnej kategorii)
- włożenie kategorii przestrzeni liniowych w kategorię zbiorów,
- odwzorowanie $V \mapsto V^*$ z kategorii przestrzeni liniowych nad K w kategorię przestrzeni liniowych nad K ,
- odwzorowanie $V \mapsto V^{**}$ z kategorii przestrzeni liniowych nad K w kategorię przestrzeni liniowych nad K ,
- włożenie kategorii przestrzeni metrycznych z kontrakcjami w kategorię przestrzeni metrycznych z odwzorowaniami Lipschitza,
- funktor z kategorii przestrzeni metrycznych z funkcjami Lipschitzowskimi w kategorię przestrzeni topologicznych z funkcjami ciągłymi.

Zadanie 10. Niech X będzie przestrzenią topologiczną. *Uzwarzenie (jednopunktowe) Aleksandrowa* to przestrzeń topologiczna $X_\infty = X \cup \{\infty\}$, gdzie wszystkie zbiory otwarte w X pozostają otwarte, a ∞ ma bazę otoczeń postaci $\{\infty\} \cup (X \setminus K)$, gdzie K jest zwartym podzbiorem X .

Sprawdź, że uzwarzenie Aleksandrowa jest zwarte, i uzasadnij, że jest funktorem z kategorii przestrzeni topologicznych w kategorię zwartych przestrzeni topologicznych.

Zadanie 11. Sprawdź że złożenie funktorów jest funktorem. Co się dzieje z ko(ntra)wariantnością?

Zadanie 12. Sprawdź że każdy funktor przekształca izomorfizmy na izomorfizmy.

Zadanie 13. Sprawdź że funktory kowariantne przekształcają diagramy przemienne na diagramy przemienne.

Zadanie 14. Znajdź przykład pokazujący że nie jest prawdą, że funktory przekształcają koprodukty na koprodukty.

Zadanie 15. Znajdź przykład pokazujący, że nie jest prawdą, że funktory przekształcają epimorfizmów. (I podobnie dla monomorfizmów.)