

Definicja. Niech V, W będą przestrzeniami liniowymi nad K . *Iloczyn tensorowy* $V \otimes W$ to przestrzeń liniowa nad K wraz z odwzorowaniem dwuliniowym $\otimes: V \times W \rightarrow V \otimes W$ takim że dla każdego odwzorowania dwuliniowego $f: V \times W \rightarrow U$ mamy jedyne odwzorowanie liniowe (nie dwuliniowe!) $\tilde{f}: V \otimes W \rightarrow U$, takie że $f(v, w) = \tilde{f}(v \otimes w)$.

Elementy $V \otimes W$ postaci $v \otimes w$ nazywamy *tensorami prostymi*.

Zadanie 1. Naśladując dowód jedności produktu w kategorii, pokaż że iloczyn tensorowy jest co najwyżej jeden z dokładnością do izomorfizmu.

Zadanie 2. Pokaż że jeśli $V_1 \cong V_2$ i $W_1 \cong W_2$, to iloczyn tensorowy V_1 i W_1 jest iloczynem tensorowym V_2 i W_2 .

Zadanie 3. Sprawdź, że jeśli $V = K^n$, $W = K^m$, to $M_{m \times n}(K)$ jest ich iloczynem tensorowym. W tym celu zdefiniuj odwzorowanie dwuliniowe $K^n \times K^m \rightarrow M_{m \times n}(K)$, a następnie zidentyfikuj $\tilde{f}$ dla każdego f i zauważ jego jedność.

Zauważ, że to i poprzednie zadania razem implikują, że skończenie wymiarowe przestrzenie liniowe mają iloczyny tensorowe.

W dalszych zadaniach możesz zakładać, że przestrzenie są skończenie wymiarowe. Zamiast tego możesz założyć też jedynie, że iloczyn tensorowy istnieje. W zadaniach z gwiazdką poniżej znajdziesz (różne) dowody, że faktycznie tak jest.

Zadanie 4. Zakładając że $\dim V, \dim W > 1$, pokaż że nie każdy tensor w $V \otimes W$ jest tensorem prostym. Innymi słowy, $\otimes: V \times W \rightarrow V \otimes W$ nie jest „na”.

Zadanie 5. Pokaż że jeśli B, C to bazy V, W odpowiednio, to tensory proste postaci $b \otimes c$ stanowią bazę $V \otimes W$. Co z tego wynika na temat wymiaru $V \otimes W$?

Zadanie 6. Zauważ że $\alpha \otimes \beta \mapsto \alpha \cdot \beta$ zadaje izomorfizm $K \otimes K \rightarrow K$.

Zadanie 7. Zrozum, że jeśli V jest przestrzenią liniową nad $\mathbf{R}$, to $V_{\mathbf{C}} := \mathbf{C} \otimes_{\mathbf{R}} V$ jest przestrzenią liniową nad $\mathbf{C}$ (zdefiniuj mnożenie przez zespolone skalary i pokaż, że jest dobrze określone). Sprawdź że $\dim_{\mathbf{R}} V = \dim_{\mathbf{C}} V_{\mathbf{C}}$. Uogólnij.

* **Zadanie 8.** Pokaż że jeśli V, W są skończenie wymiarowe, to $\text{Hom}(V, W) \cong V^* \otimes W$. W tym celu rozważ odwzorowanie dwuliniowe $V^* \times W \rightarrow \text{Hom}(V, W)$ zadane wzorem $(v^*, w) \mapsto (v \mapsto v^*(v)w)$ i pokaż, że indukowane odwzorowanie liniowe $V^* \otimes W \rightarrow \text{Hom}(V, W)$ jest izomorfizmem. Następnie sprawdź, że jeśli $V = W$ jest nieskończenie wymiarowa, to to nie jest izomorfizm (wskazówka: obraz tego odwzorowania składa się z endomorfizmów skończonej rangi).

Zadanie 9. Zdefiniuj naturalne mnożenie na $\mathbf{C} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$, pokaż że jest przemienne i rozdzielne względem dodawania, ale $\mathbf{C} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ nie jest ciałem.

Zadanie 10. Zdefiniuj iloczyn tensorowy

a) trzech, b) n , gdzie $n \in \mathbf{N}$ c) nieskończenie wielu przestrzeni.

Kolejne trzy zadania to różne dowody istnienia iloczynu tensorowego dowolnych przestrzeni liniowych.

Pierwszy dowód jest najdłuższy, ale jest też najbardziej typowy: zupełnie analogiczne są dowody istnienia uniwersalnych obiektów bardzo różnego rodzaju, w topologii, algebrze, analizie funkcjonalnej itd.

* **Zadanie 11.** Niech V, W będą iloczynami tensorowymi.

Niech $\mathcal{B}_{V,W}$ oznacza kolekcję wszystkich funkcji dwuliniowych $f : V \times W \rightarrow U_f$

- Zauważ, że jeśli $\mathcal{F}$ jest podzbiorem $\mathcal{B}_{V,W}$, to funkcja $f_{\mathcal{F}} : V \times W \rightarrow U_{\mathcal{F}} := \prod_{f \in \mathcal{F}} U_f$ zadana wzorem $f_{\mathcal{F}}(v, w)(f) = f(v, w)$ (tzn. f -ta współrzędna $f_{\mathcal{F}}(v, w)$ to $f(v, w)$).
- Dla $\mathcal{F}$ jak wyżej, niech $U'_{\mathcal{F}}$ oznacza podprzestrzeń $U_{\mathcal{F}}$ rozpiętą przez obraz $f_{\mathcal{F}}$. Na chwilę udając że nie widzisz, że $\mathcal{B}_{V,W}$ nie jest zbiorem, pokaż że $f_{\mathcal{B}_{V,W}} : V \times W \rightarrow U'_{\mathcal{B}_{V,W}}$ jest iloczynem tensorowym V i W .
- Zauważ, że zamiast brać całe $\mathcal{B}_{V,W}$, wystarczy wziąć takie f , że $U_f = U'_f$.
- Zauważ, że wystarczy wziąć po jednym reprezentancie każdej klasy izomorfizmu. (W tym celu ustal co to znaczy, że funkcje dwuliniowe z $V \times W$ są izomorficzne, np. wskazując odpowiednią kategorię.)
- Wywnioskuj stąd istnienie iloczynu tensorowego (już bez udawania).
- Literalnie tutaj jest jeszcze mały problem teoriomnogościowy. Ćwiczenie z teorii zbiorów (nie z algebry liniowej): zidentyfikuj ten problem i rozwiąż go (wskazówka: wybieramy po jednym elemencie z każdej klasy abstrakcji pewnej relacji równoważności... ale na czym jest zdefiniowana ta relacja?).

Drugi dowód jest najbardziej konstruktywny z tych trzech, nie korzysta z pewnika wyboru.

* **Zadanie 12.** Niech V, W będą dowolnymi przestrzeniami liniowymi nad K . Sprawdź że iloczyn tensorowy istnieje w następujący sposób:

- Zdefiniuj przestrzeń liniową $F_{V \times W}$ nad K której bazą jest $V \times W$. (Wymiar tej przestrzeni jest zwykle dość duży; nie przejmuj się tym za bardzo.)
- Zdefiniuj naturalne odwzorowanie dwuliniowe $V \times W \rightarrow F_{V \times W}$.
- Pokaż że $F_{V \times W}/Q$ jest iloczynem tensorowym V i W , gdzie Q jest podprzestrzenią $F_{V,W}$ rozpiętą przez wszystkie wektory jednej z postaci:
 - $(\alpha v, w) - \alpha(v, w),$
 - $(v, \alpha w) - \alpha(v, w),$
 - $(v_1 + v_2, w) - (v_1, w) - (v_2, w),$
 - $(v, w_1 + w_2) - (v, w_1) - (v, w_2).$

Trzeci dowód jest stosunkowo prosty, ale niestety wymaga użycia bazy.

* **Zadanie 13.** Udowodnij istnienie iloczynu tensorowego dowolnych przestrzeni liniowych, uogólniając zadanie 3 (wskazówka: rozważ nieskończone macierze w których jest jedynie skończenie wiele niezerowych wyrazów).