Algebra liniowa 2 R (konwersatorium 5 o modułach)

Definicja. *Pierścień* (przemienny z jedynką) to zbiór R z działaniami $+, \cdot$ i wyróżnionymi elementami $0, 1$, spełniającymi oczywiste warunki łączności i rozdzielności, a także przemienności dodawania i mnożenia i z elementami przeciwnymi (ale być może bez elementów odwrotnych).

Przykład.
- $\mathbf{Z}$,
- $\mathbf{Z}_n$,
- ciało,
- $R[X]$, gdzie R jest pierścieniem,
- pierścienie wielomianów większej (być może nieskończonej, nawet nieprzeliczalnej) liczby zmiennych,
- $R[\varepsilon]$, gdzie $\varepsilon^2 = 0$,
- R^n, gdzie R jest pierścieniem,
- pierścień $C(X)$ funkcji ciągłych (o wartościach w $\mathbf{R}$) na przestrzeni topologicznej X,
- pierścień $C^\infty(M)$ funkcji gładkich na rozmaitości różniczkowalnej M (jeśli nie wiesz, co to rozmaitość, możesz myśleć, że M jest otwartym podzbiorem $\mathbf{R}^n$).

Definicja. *Moduł* nad pierścieniem R to zbiór z wyróżnionym elementem 0 i działaniami $+\colon M \times M \to M$, $\cdot\colon R \times M \to M$ spełniającymi te same aksjomaty, co przestrzeń liniowa (poza tym, że R nie musi być ciałem).

Przykład.
- przestrzenie liniowe są modułami,
- jeśli R jest pierścieniem, to R^n jest modułem nad R,
- jeśli $\mathbf{Z}_6$ jest modułem nad $\mathbf{Z}$,
- ogólniej, jeśli R jest pierścieniem, to jest modułem nad $\mathbf{Z}$,
- ogólniej, jeśli M jest modułem nad R (a nawet tylko grupą abelową), to jest modułem nad $\mathbf{Z}$,
- jeśli M jest rozmaitością różniczkowalną i n jest ustalone, to rodzina wszystkich gładkich n-wymiarowych pól wektorowych na M jest modułem nad $C^\infty(M)$.

Definicja. Jeśli M jest R-modułem, to mówimy że $B \subseteq M$ jest *liniowo niezależny*, jeśli jego elementy nie spełniają żadnego nietrywialnego równania liniowego o współczynnikach z R (tak samo, jak dla przestrzeni liniowych).

Mówimy że B jest *bazą*, jeśli ponadto $M = \mathrm{Lin}_R(B)$.

Mówimy że M jest *wolny*, jeśli ma bazę.

Zadanie 1. Sprawdź, że R^n jest wolnym R-modułem.

Zadanie 2. Sprawdź, że $\{2, 3\} \subseteq \mathbf{Z}$ rozpina $\mathbf{Z}$ jako $\mathbf{Z}$-moduł, ale nie zawiera żadnej bazy (mimo że $\mathbf{Z}$ jest wolnym $\mathbf{Z}$-modułem).

Zadanie 3. Sprawdź, że $\{2\} \subseteq \mathbf{Z}$ jest liniowo niezależny, ale nie rozszerza się do bazy $\mathbf{Z}$ jako $\mathbf{Z}$-modułu.

Zadanie 4. Sprawdź, że $\mathbf{Z}_2$ nie jest wolnym $\mathbf{Z}$-modułem, ani nie jest wolnym $\mathbf{Z}_4$-modułem, ani w ogóle nie jest $\mathbf{Z}_3$-modułem.

Zadanie 5. Znajdź wszystkie $\mathbf{Z}$-liniowo niezależne podzbiory $\mathbf{Q}$. Wywnioskuj stąd, że $\mathbf{Q}$ nie jest wolnym $\mathbf{Z}$-modułem.

Zadanie 6. Sprawdź, że jeśli M jest wolnym R-modułem i ma bazę o n elementach, to $M \cong R^n$ (jako R-moduł).

Zadanie 7. Sprawdź, że jeśli V jest przestrzenią liniową nad K i $F \in \mathrm{End}(V)$, to V ma strukturę $K[X]$-modułu zadaną przez $P \cdot v := P(F)(v)$.

Zadanie 8. Zauważ, że moduł z poprzedniego zadania nigdy nie jest wolny, jeśli $0 < \dim_K V < \infty$.

Zadanie 9. Zdefiniuj sumę prostą modułów (nad ustalonym pierścieniem).

Zadanie 10. Sprawdź, że $\mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_3 \cong \mathbf{Z}_6$. Wywnioskuj stąd (rozważając je jako $\mathbf{Z}_6$-moduły), że suma prosta modułów, które nie są wolne, może być wolna.

Zadanie 11. Podaj przykład modułu M nad $\mathbf{Z}$, takiego że $M \oplus N$ nigdy nie jest wolnym $\mathbf{Z}$-modułem. (Moduł M taki, że istnieje N, taki że $M \oplus N$ jest wolny, nazywamy projektywnym.)

Zadanie 12. Uzasadnij, że $2\mathbf{Z} \leqslant \mathbf{Z}$ nie jest dopełnialny (to znaczy nie istnieje $M \leqslant \mathbf{Z}$ taki że $\mathbf{Z} = 2\mathbf{Z} \oplus M$).

Zadanie 13. Zdefiniuj moduł dualny.

Zadanie 14. Znajdź przykład niezerowego modułu M, takiego że M^* jest zerowy. (W szczególności naturalne odwzorowanie $M \to M^{**}$ nie jest różnowartościowe.)

Zadanie 15. Zdefiniuj iloczyn tensorowy modułów.

Zadanie 16. Sprawdź, że $\mathbf{Z}_2 \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}_3 = 0$.

Zadanie 17. Wyznacz $\mathbf{Z}_2 \otimes \mathbf{Z}_4$. Uogólnij.

Zadanie 18. Sprawdź, że jeśli M jest R-modułem, to $M \otimes_R R = R$.

Zadanie 19. Sprawdź, że jeśli M jest skończonym $\mathbf{Z}$-modułem, to $M \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q} = 0$.

Zadanie 20. Sprawdź, że jeśli M, N są wolne, to $M \otimes N$ jest wolny (znajdź bazę).

Zadanie 21. Sprawdź, że $R^n \otimes_R M \cong M^n$.