

Na tej liście V jest skończenie wymiarową przestrzenią liniową nad $\mathbf{R}$, a φ — ustaloną symetryczną formą dwuliniową na V .

Zadanie 1. Wyznacz zespolone i rzeczywiste postacie Jordana i bazy jordanowskie macierzy $\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Zadanie 2. W bazie (b_1, b_2) przestrzeni V endomorfizm F ma macierz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Uzasadnij, że $(b_2 + i0, b_1 + ib_2)$ jest bazą $V_{\mathbf{C}}$ i oblicz macierz $F_{\mathbf{C}}$ w tej bazie.

Zadanie 3. Przekonaj się, że jeśli A, B są zespolonymi macierzami, a v zespolonym wektorem takim że AB, Av mają sens, to $\overline{AB} = \bar{A} \cdot \bar{B}$ i $\overline{Av} = \bar{A}\bar{v}$ (tu sprzężenie oznacza sprzężenie wyraz po wyrazie).

Zadanie 4. Sprawdź że dla dowolnych $A, B \subseteq V$ zachodzi:

$$\text{a) } A^{\perp} \leq V, \quad \text{b) } A^{\perp} = (\text{Lin} A)^{\perp}, \quad \text{c) } A^{\perp} \cap B^{\perp} = (A \cup B)^{\perp}, \quad \text{d) } A \subseteq (A^{\perp})^{\perp}.$$

Zadanie 5. Sprawdź bezpośrednim rachunkiem, że $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ jest dodatnio określona wtedy i tylko wtedy gdy $a > 0$ i $\det A > 0$. (Wskazówka: wylicz Δ dla trójkianu kwadratowego $ax^2 + 2bxy + dy^2$, traktując y jako parametr.)

Zadanie 6. Zastosuj ortogonalizację Grama-Schmidta (względem standardowego iloczynu skalarnego) do trójki $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Zadanie 7. Znajdź bazę $\mathbf{R}^2$ ortonormalną względem formy zadanej przez $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Zadanie 8. Sprawdź, że jeśli B jest bazą V i $v \in V_{\mathbf{C}}$, to $[\bar{v}]_B = \overline{[v]_B}$.

Zadanie 9. Ustalmy $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k z^k \in \mathbf{C}[X]$, $F \in \text{End}(V)$, $v \in V_{\mathbf{C}}$. Uzasadnij (np. korzystając z poprzedniego zadania), że

$$\overline{P(F_{\mathbf{C}})(v)} = (\bar{a}_0 \text{id}_V + \bar{a}_1 F_{\mathbf{C}} + \dots + \bar{a}_n F_{\mathbf{C}}^n)(\bar{v})$$

i znajdź przykład na to, że $F_{\mathbf{C}}$ powyżej nie można zastąpić dowolnym $G \in \text{End}(V_{\mathbf{C}})$.

Zadanie 10. Podaj przykład macierzy 4×4 której jedynymi wektorami własnymi są skalarnie krotkości następujących wektorów: $(1, 0, 2, 1)^{\top}$, $(-1, 1, 0, 1)^{\top}$. Ile wartości własnych może mieć taka macierz? (Zrób to zadanie nad $\mathbf{R}$, jak i nad $\mathbf{C}$.)

Zadanie 11. Oblicz:

$$\text{a) } \exp \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \exp \left[t \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right].$$

Zadanie 12. Udowodnij, że jeśli A jest zespoloną [rzeczywistą] macierzą kwadratową, to istnieje odwracalna zespolona [rzeczywista] macierz P , taka że $A^{\top} = PAP^{-1}$. [Wsk. najpierw rozwiąż to zadanie dla jednej klatki Jordana.]

Zadanie 13. Uzasadnij że jeżeli φ jest niezerową symetryczną formą dwuliniową, to istnieje taki v że $\varphi(v, v) \neq 0$. (Wskazówka: weź v, w takie że $\varphi(v, w) \neq 0$ i rozważ $\varphi(v + w, v + w)$.)

Zadanie 14.

- Sprawdź że każda macierz $A \in M_{n \times n}(\mathbf{R})$ przedstawia się jako suma $A = A_1 + A_2$, gdzie $A_1 = A_1^{\top}$ i $A_2 = -A_2^{\top}$.
- Wywnioskuj stąd że każda forma dwuliniowa jest sumą pewnej formy symetrycznej i pewnej formy antysymetrycznej.

Zadanie 15. Pokaż że jeżeli A jest dowolną macierzą o współczynnikach rzeczywistych (niekoniecznie kwadratową), to $A^T A$ jest *dodatnio półokreślona*, tzn. związana z nią forma dwuliniowa spełnia $\varphi(v, v) \geq 0$.

Zadanie 16. Zbiór symetrycznych macierzy 2×2 jest przestrzenią liniową. Wyznacz jej wymiar, a następnie naskicuj jak wygląda podzbiór złożony z macierzy dodatnio określonych.

Zadanie 17. Uzasadnij lub obal:

- a) jeżeli macierz 3×3 ma dodatnie wyrazy, to jest dodatnio określona,
- b) suma macierzy dodatnio określonych jest dodatnio określona,
- c) iloczyn macierzy dodatnio określonych jest dodatnio określony.

Zadanie 18. Podaj przykład symetrycznej formy dwuliniowej φ i dwóch wektorów izotropowych v, w (tzn. spełniających $\varphi(v, v) = \varphi(w, w) = 0$), takich że $\varphi(v + w, v + w) \neq 0$.

Zadanie 19. Zbadaj, czy φ jest formą dwuliniową na $M_{n \times n}(\mathbf{R})$, a jeżeli tak, rozstrzygnij, czy jest symetryczne, dodatnio określone, gdzie $\varphi(A, B) =$

- a) $\text{tr}(AB)$
- b) $\det(AB)$,
- c) $\text{tr}(AB^T)$
- d) $\text{tr}(A + B)$.

Zadanie 20. Dla formy dwuliniowej φ piszemy $q_\varphi(v) = \varphi(v, v)$ (q_φ to forma kwadratowa stowarzyszona z φ). Załóżmy że φ jest symetryczna. Rozwijając $q_\varphi(v + w, v + w)$, znajdź wzór pozwalający odzyskać φ z q_φ .

Zadanie 21. Podaj przykład przekształcenia liniowego $\mathbf{R}^3$ w siebie które ma nieskończenie wiele podprzestrzeni niezmienniczych.

Zadanie 22. Czy istnieje $F : V \rightarrow V$, takie że $\dim(\sum_{\lambda \in \sigma(F)} V^\lambda) = 2$, jeśli (a) $V = \mathbf{R}^4$? (b) $V = \mathbf{R}^5$?

Zadanie 23. Wykaż, że dla $A \in M_{n \times n}(\mathbf{C})$ zachodzi wzór $\det \exp A = e^{\text{tr} A}$.

Zadanie 24. Oblicz exponens macierzy: $\begin{pmatrix} a & b & 1 & 0 \\ -b & a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & -b & a \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} a + bi & 1 \\ 0 & a + bi \end{pmatrix}$. Porównaj wyniki.

$[a, b \in \mathbf{R}]$

Zadanie 25. Znajdź funkcję $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ spełniającą warunki $f'' = 4f' - 4f$, $f(0) = 1$, $f'(0) = 3$.

Zadanie 26. Załóżmy że $v, w \in \mathbf{C}^n$ są niezerowymi wektorami. Udowodnij że istnieje (zespolona) macierz symetryczna A taka że $Av = w$.