

$Q$  jest zwykle formą kwadratową na skończenie wymiarowej przestrzeni  $V$ , a  $\varphi$  formą dwuliniową. Wektor  $v \in V$  nazywamy *izotropowym*, jeśli  $Q(v) = 0$ . Zakładamy, że  $1 + 1 \neq 0$ . Forma kwadratowa na rzeczywistej przestrzeni liniowej jest dodatnio/ujemnie półokreślona, jeśli jest nieujemna/niedodatnia na każdym wektorze, a ujemnie określona, jeśli  $Q(v) < 0$  dla  $v \neq 0$ .

Zadania o formach kwadratowych łatwo się tłumaczą na zadania o formach symetrycznych (ale zwykle jest wtedy więcej pisania) — jeżeli wolisz, możesz je rozwiązywać w tej formie.

**Zadanie 1.** Udowodnij że dla dowolnej symetrycznej formy dwuliniowej  $\varphi$  mamy  $\text{Lin} A \subseteq A^{\perp\perp}$ , a jeżeli  $\varphi$  jest dodatnio określona, to zachodzi równość.

**Zadanie 2.** Znajdź  $m^{BB}(Q)$  dla  $Q((x, y, z)^T) = x^2 + 5xy + 3yz + yx - 2z^2$  i  $B = ((1, 0, 1)^T, (-1, -1, 1)^T, (0, 1, 3)^T)$ .

**Zadanie 3.** Sprowadź (np. metodą Lagrange'a) do postaci diagonalnej formy

- $x_1x_2 + x_2^2$ ,
- $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + 5x_3^2$ ,
- $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_3^2$ ,
- $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1$ ,
- $\sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j$ .

**Zadanie 4.** Dla jakich wartości  $\lambda$  następujące formy są dodatnio określone:

- $5x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ ;
- $2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 2x_1x_3$ ;
- $x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$ ;
- $x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 10x_1x_3 + 6x_2x_3$ ;

**Zadanie 5.**

- Uzasadnij, że obcięcie formy kwadratowej do podprzestrzeni jest formą kwadratową.
- Ogólniej, uzasadnij, że jeśli  $F: W \rightarrow V$  jest liniowe, zaś  $Q: V \rightarrow K$  jest formą kwadratową, to  $Q \circ F: W \rightarrow K$  jest formą kwadratową.
- Zrób to samo dla form dwuliniowych (symetrycznych, dodatnio określonych).

**Zadanie 6.** Wyznacz symetryczną formę dwuliniową związaną z formą kwadratową  $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$ .

**Zadanie 7.** Załóżmy że  $A, B$  są symetrycznymi macierzami rzeczywistymi. Uzasadnij że:

- jeśli  $A, B$  są dodatnio określone, to  $A + B$  jest dodatnio określona,
- $AB$  jest symetryczna wtedy i tylko wtedy gdy  $AB = BA$ . Podaj przykład takich dodatnio określonych  $A, B$ , które tego nie spełniają.

*Uwaga: Jeśli  $A, B$  są dodatnio określone i przemienne, to  $AB$  też jest. To będzie można wywnioskować za jakiś czas z twierdzenia spektralnego.*

**Zadanie 8.** Uzasadnij, że jeżeli  $A$  jest rzeczywistą macierzą, której kolumny tworzą bazę ON, to jej wiersze też tworzą bazę ON.

**Zadanie 9.** Uzasadnij że jeżeli  $P$  jest macierzą odwracalną, to  $A \in M_{n \times n}(K)$  ma ten sam rząd co  $PAP^T$ .

**Zadanie 10.** Rozważmy formę symetryczną  $\varphi$ . Czy jest prawdą, że wartości własne macierzy  $m^{BB}(\varphi)$  nie zależą od wyboru bazy  $B$ ?

**Zadanie 11.** Na przestrzeni  $V = \mathbb{R}_n[x]$  rozważamy formę symetryczną  $\varphi(P, Q) = \int_0^1 P(t)Q(t) dt$ . Znajdź bazę ON  $V$ , gdy:

- $n = 1$ ,
- $n = 2$ ,
- $n = 3$ .

**Zadanie 12.** Czy jest prawdą, że symetryczna rzeczywista macierz  $A$  jest dodatnio półokreślona (tzn.  $(\forall X)(X^TAX \geq 0)$ ) wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie jej minory główne (nie tylko wiodące!) są nieujemne?

**Zadanie 13.** Podaj kryterium ujemnej określoności rzeczywistej macierzy analogiczne do kryterium Sylwestera.

**Zadanie 14.** Pokaż że jeśli  $\varphi$  jest niedegenerowaną symetryczną formą dwuliniową na (skończenie wymiarowej) zespolonej przestrzeni liniowej  $V$ , to istnieje taka baza  $B$ , że  $m^{BB}(\varphi) = I$ . *Wskazówka: naśladować proces Grama-Schmidta, lub użyć tw. Lagrange'a o diagonalizacji.*

**Zadanie 15.** Wywnioskuj z poprzedniego zadania, że każda odwracalna zespolona macierz  $A$  jest postaci  $PP^T$  dla pewnej macierzy odwracalnej  $P$ .

**Zadanie 16.**

- a) Znajdź przykład symetrycznej formy dwuliniowej  $\varphi$  na  $\mathbf{R}^3$  i baz  $B = (b_1, b_2, b_3), C = (c_1, c_2, c_3)$  takich że

$$m^{BB}(\varphi) = m^{CC}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ale  $b_1$  i  $c_1$  ani  $b_2$  i  $c_2$  nie są współliniowe.

- b) Rozstrzygnij czy dla  $B, C$  jak w poprzednim podpunkcie  $b_3, c_3$  muszą być współliniowe.

**Zadanie 17.** Załóżmy, że funkcja  $Q : V \rightarrow K$  spełnia warunki: (a)  $(v, w) \mapsto \frac{1}{2}(Q(v+w) - Q(v) - Q(w))$  jest formą dwuliniową; (b)  $(\forall v \in V)(Q(-v) = Q(v))$ . Udowodnij, że  $Q$  jest formą kwadratową. Czy warunek (b) jest istotny?

**Zadanie 18.** Uzasadnij, że rzeczywista forma kwadratowa jest dodatnio półokreślona wtedy i tylko wtedy, gdy jej macierz da się zapisać w postaci  $M^T M$  dla pewnej macierzy  $M$ . Możliwie podobnym warunkiem scharakteryzuj macierze dodatnio określone.

**Zadanie 19.** Załóżmy, że zbiór wektorów izotropowych jest podprzestrzenią. Wykaż, że wtedy (a)  $Q$  jest półokreślona; (b) jeśli  $v, w \in V$ , przy czym  $v$  jest wektorem izotropowym, to  $Q(v, w) = 0$ .

**Zadanie 20.** Niech  $Q$  będzie formą kwadratową na przestrzeni  $R_n[X]$ . Czy zawsze istnieje  $W \in R_n[X]$ , taki że dla każdego  $P \in R_n[X]$  zachodzi  $Q(P) = \int_0^1 P(x)^2 W(x) dx$ ?

**Zadanie 21.** Ze skończonym grafem (niezorientowanym, bez krawędzi wielokrotnych, bez pętli), wiążemy macierz  $(a_{ij})$ : numerujemy wierzchołki grafu i kładziemy  $a_{ij} = -1$  jeśli  $i$ -ty i  $j$ -ty wierzchołek są połączone krawędzią,  $a_{ij} = 0$  jeśli nie są, oraz  $a_{ii} = 2$  dla każdego  $i$ . Znajdź wszystkie grafy dla których dostaje się dodatnio określoną macierz.