

Na tej liście V jest dowolną przestrzenią euklidesową lub unitarną (chyba że jest napisane inaczej).

Zadanie 1. Sprawdź własności:

- a) $(A+B)^* = A^* + B^*$, b) $(AB)^* = B^*A^*$, c) $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$,
d) $A^{**} = A$, e) $\det A^* = \overline{\det A}$.

Zadanie 2. Sprawdź równoważność warunków dla $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$:

- a) $A^{-1} = A^*$, b) kolumny A tworzą bazę ON, c) wiersze A tworzą bazę ON.

Zadanie 3. Przekonaj się że $V/\mathbb{C}$ ma bazę ON względem φ (hermitowskiej) wtedy i tylko wtedy gdy φ jest dodatnio określona. (To znaczy: że dowód dla form symetrycznych działa, być może po poprawce w postaci zamiany kolejności argumentów, lub dopisania sprzężenia.)

Zadanie 4. Przekonaj się że jeżeli φ jest hermitowska i $\varphi|_W$ jest niezdegenerowana, to $V = W \oplus W^\perp$. (To znaczy: że dowód dla form symetrycznych działa, po poprawkach jak wyżej.)

Zadanie 5. Uzupełnij do bazy ortogonalnej: (a) $\{(1, -2, 2, -3)^\top, (2, -3, 2, 4)^\top\}$; (b) $\{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})^\top, (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})^\top\}$.

Zadanie 6. Znajdź ortogonalną bazę podprzestrzeni

- a) $\text{Lin}((1, 2, 2, -1)^\top, (1, 1, -5, 3)^\top, (3, 2, 8, -7)^\top)$;
b) $\text{Lin}((2, 1, 3, -1)^\top, (7, 4, 3, -3)^\top, (1, 1, -6, 0)^\top, (5, 7, 7, 8)^\top)$.

Zadanie 7. Wyznacz bazę $\text{Lin}((1, 0, 2, 1)^\top, (2, 1, 2, 3)^\top, (0, 1, -2, 1)^\top)^\perp$.

Zadanie 8. Znajdź rzut prostopadły wektora $(5, 2, -2, 2)$ na $W = \text{Lin}((2, 1, 1, -1)^\top, (1, 1, 3, 0)^\top, (1, 2, 8, 1)^\top)$ i na $W^\perp$.

Zadanie 9. Udowodnij nierówności Cauchy'ego-Schwarza i trójkąta (w dowolnej przestrzeni euklidesowej i unitarnej). (Wskazówka: sprowadź je do nierówności na $\mathbb{R}^n/\mathbb{C}^n$, lub jeszcze lepiej, do $\mathbb{R}^2/\mathbb{C}^2$, zauważając, że każda dwuwymiarowa przestrzeń euklidesowa/unitarna jest izomorficzna z $\mathbb{R}^2/\mathbb{C}^2$ ze standardowym iloczynem skalarnym.)

Zadanie 10. Zadać układem równań dopełnienie ortogonalne przestrzeni zadanej układem

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 11x_3 - 13x_4 = 0 \\ 4x_1 + x_2 + 18x_3 - 23x_4 = 0 \end{cases}$$

Wskazówka: przedstaw wyjściową przestrzeń jako dopełnienie ortogonalne pewnego układu wektorów.

Zadanie 11. Wyznacz odległość punktu $(3, 3, -4, 2)^\top$ od podprzestrzeni zadanej układem równań $x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0$, $x_1 + 3x_2 + x_3 - 3x_4 = 0$. (Tzn. odległość od rzutu ortogonalnego, por. zadanie 18.)

Zadanie 12. Napisz w bazie standardowej macierz rzutu prostopadłego na podprzestrzeń zadaną równaniem $x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 0$.

Zadanie 13. Rozważmy przestrzeń $\mathbb{R}_3[X]$ z iloczynem skalarnym $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(x)Q(x)dx$. Zastosuj proces Grama-Schmidta do układu $(1, X, X^2)$. Znajdź odległość X^3 od podprzestrzeni $\mathbb{R}_2[X]$.

Zadanie 14. Udowodnij lub obal (W, U, Z to dowolne podprzestrzenie, zaś A, B – dowolne podzbiory V):

- a) $(W + U)^\perp = W^\perp \cap U^\perp$; b) $A \subseteq (A^\perp)^\perp$; c) $(W \cup U)^\perp = W^\perp \cup U^\perp$;
d) $[A = (A^\perp)^\perp] \Rightarrow A \leq V$; e) $(A \cap B)^\perp = A^\perp + B^\perp$.

Zadanie 15. Sprawdź że każdy układ ON w przestrzeni euklidesowej lub unitarnej rozszerza się do bazy ON. *Wskazówka: najpierw rozszerz do dowolnej bazy.*

Zadanie 16. Niech $\pi_W : V \rightarrow W$ będzie rzutem ortogonalnym na podprzestrzeń przestrzeni euklidesowej/unitarnej V . Pokaż że:

- a) $|\pi_W(v)| \leq |v|$,
- b) $|v - \pi_W(v)|$ minimalizuje $|v - w|$ dla $w \in W$.

Wskazówka: zacznij od wybrania bazy ON dla W .

Zadanie 17. Niech $W, U \leq V$. Czy jest prawdą, że (a) $\pi_W \circ \pi_U = \pi_{W \cap U}$? (b) $\pi_W + \pi_{W^\perp} = \text{id}$?

Zadanie 18. Niech $W \leq V$, zaś B niech będzie bazą ortonormalną przestrzeni euklidesowej V . Udowodnij, że każdy wyraz macierzy $m_B(\pi_W)$ jest co do modułu nie większy niż 1.

Zadanie 19. Wykaż, że suma kwadratów długości rzutów wektorów dowolnej bazy ortonormalnej na k -wymiarową podprzestrzeń jest równa k .

Zadanie 20. Uzasadnij, że jeśli W, U są podprzestrzeniami przestrzeni euklidesowej V , zaś $x \in w + W$, $y \in u + U$ punktami, to: $d(x, y) = \min\{d(a, b) : a \in w + W, b \in u + U\} \iff ((x - y) \perp W) \wedge (x - y \perp U)$.

Zadanie 21. Niech W, U będą podprzestrzeniami V . Niech $Z = (W + U)^\perp$, $x \in w + W$, $y \in u + U$. Uzasadnij, że odległość zbiorów $w + W$, $u + U$ wynosi $|\pi_Z(x - y)|$. (Odległość zbiorów A, B to $\inf\{d(a, b) : a \in A, b \in B\}$. Oblicz odległość zbioru rozwiązań układu
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6 \end{cases} \quad \text{od}$$
 zbioru $(0, 2, 6, -5)^\top + \text{Lin}((-7, 1, 1, 1)^\top, (-10, 1, 2, 3)^\top)$.

Zadanie 22. Niech Q będzie formą kwadratową na przestrzeni wymiaru n , zaś A macierzą Q w pewnej bazie. Załóżmy, że minory główne $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ są wszystkie niezerowe. Niech s oznacza liczbę zmian znaku w ciągu $1, \Delta_1, \dots, \Delta_n$. Udowodnij, że sygnatura Q to $(n - s, s)$. [Wsk. zaadaptuj dowód kryterium Sylwestera.]

Zadanie 23. Formy kwadratowe Q, Q' na przestrzeni liniowej V nazywamy *liniowo równoważnymi*, jeśli istnieje odwracalne przekształcenie liniowe $F : V \rightarrow V$, takie że $Q' = Q \circ F$. Uzasadnij, że Q, Q' są liniowo równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy mają tę samą sygnaturę.

Zadanie 24. Jaki jest maksymalny możliwy wymiar izotropowej podprzestrzeni (tzn. podprzestrzeni, której każdy wektor jest izotropowy) w przestrzeni liniowej wymiaru n z formą kwadratową sygnatury (p, q) ?

Zadanie 25. W przestrzeni $C[0, 1]$ funkcji ciągłych na przedziale $[0, 1]$ z iloczynem skalarnym $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$ wyznacz dopełnienie ortogonalne podprzestrzeni $\{f \in C[0, 1] : f(0) = 0\}$.