

Na tej liście V jest dowolną przestrzenią euklidesową lub unitarną (chyba że jest napisane inaczej). $T : V \rightarrow V$ jest przekształceniem liniowym. Przekształcenie samosprężone T nazywamy *nieujemnie określonym*, jeśli $(\forall v \in V)(\langle Tv, v \rangle \geq 0)$ (a *dodatnio określonym*, jeśli dla niezerowych v nierówność jest ostra).

Zadanie 1. (V unitarna) Uzasadnij, że jeśli T jest samosprężone, to dla każdego $v \in V$ liczba $\langle Tv, v \rangle$ jest rzeczywista (nie korzystając z twierdzenia spektralnego!). Wywnioskuj stąd że wartości własne T są rzeczywiste.

Zadanie 2. Zdiagonalizuj w bazie ortonormalnej macierze:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 3 & 2+2i \\ 2-2i & 3 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 3 & 2-i \\ 2+i & 7 \end{pmatrix} \quad \text{c) } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{d) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Zadanie 3. Znajdź rozkład singularny macierzy:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{c) } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{d) } \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Zadanie 4. Zdiagonalizuj formy kwadratowe w bazie ortonormalnej. (Znajdź bazę ortonormalną w której forma jest diagonalna, i postać formy we współrzędnych związanych z tą bazą; wyjaśnij jak zamieniać te lepsze współrzędne na standardowe, i odwrotnie. Formy są określone na $\mathbb{R}^n$ ze standardowym iloczynem skalarnym i podane w standardowych współrzędnych)

$$\text{a) } 2x_1x_2 - 6x_1x_3 - 6x_2x_4 + 2x_3x_4; \quad \text{b) } 9x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 8x_4^2 + 8x_2x_3 - 4x_2x_4 + 4x_3x_4;$$

Zadanie 5. Niech $C = (b_1, b_1 + b_2)$, gdzie $B = (b_1, b_2)$ jest bazą ortonormalną V ; niech $m_B^B(T) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Znajdź $m_C(T^*)$ oraz $m_C(T)^*$.

Zadanie 6. Uzasadnij, że jeżeli macierze A, B diagonalizują się we wspólnej bazie, to są przemienne (tzn. $AB = BA$).

Zadanie 7. Sprawdź że $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ Wywnioskuj stąd i z poprzedniego zadania, że dodatnio określone macierze na ogół *nie* diagonalizują się we wspólnej bazie.

Zadanie 8. Sprawdź że dla każdej (niekoniecznie kwadratowej) $A \in M_{n \times m}(\mathbb{C})$, $v \in \mathbb{C}^n$ i $w \in \mathbb{C}^m$ zachodzi

$$\langle v, Aw \rangle = \langle A^*v, w \rangle.$$

Zadanie 9. Udowodnij wzory polaryzacyjne, dla $Q(v) = \varphi(v, v)$:

$$\text{a) jeżeli } \varphi \text{ jest formą symetryczną: } \varphi(v, w) = \frac{Q(v+w) - Q(v-w)}{4};$$

$$\text{b) jeżeli } \varphi \text{ jest formą hermitowską: } \varphi(v, w) = \frac{1}{4} \sum_{j=0}^3 i^{-j} Q(v + i^j w).$$

Zadanie 10. Podaj przykład trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej V , samosprężonego $T : V \rightarrow V$, oraz bazy V złożonej z parami nieprostopadłych wektorów własnych T .

Zadanie 11. Niech $T = T^*$. Udowodnij, że wektory własne T odpowiadające różnym wartościom własnym są prostopadłe (nie korzystając z twierdzenia spektralnego).

Zadanie 12. Udowodnij, że jeśli $U : V \rightarrow V$ jest przekształceniem unitarnym, zaś $T = T^*$, to UTU^{-1} jest samosprężone.

Zadanie 13. Niech $T = T^*$. Udowodnij, że T jest nieujemnie określone wtedy i tylko wtedy, gdy $\sigma(T) \subset [0, +\infty)$.

Zadanie 14. Uzasadnij że każda forma hermitowska/rzeczywista symetryczna diagonalizuje się w bazie ON. *Wskazówka: rozważ F takie że $\langle v, F(w) \rangle = \varphi(v, w)$.*

Zadanie 15. Uzasadnij, że jeżeli $S, T \in \text{End}(V)$ są samosprężone i przemienne, to diagonalizują się we wspólnej bazie ortonormalnej. Udowodnij też implikację odwrotną (tzn. że jeśli S, T diagonalizują się we wspólnej bazie, to są przemienne). *Wskazówka: skorzystaj z faktu, że przemienne endomorfizmy zachowują wzajemnie przestrzenie własne.*

Zadanie 16. Sprawdź że formy symetryczne $\varphi_1(x, y) = x_1y_1 - x_2y_2$ i $\varphi_2(x, y) = x_1y_2 + x_2y_1$ na $\mathbb{R}^2$ nie diagonalizują się we wspólnej bazie (wystarczy sprawdzić, że dwa nieizotropowe wektory ortogonalne względem φ_1 nie są ortogonalne względem φ_2).

Zadanie 17. Uzasadnij że jeżeli φ_1, φ_2 są hermitowskie/symetryczne, a ponadto φ_1 jest dodatnio określona, to istnieje taka baza B że $m^{BB}(\varphi_1) = I$ i $m^{BB}(\varphi_2)$ jest diagonalna. W szczególności φ_1, φ_2 diagonalizują się we wspólnej bazie. *Wskazówka: rozważ V jako przestrzeń unitarną/euklidesową z iloczynem skalarnym $\langle -, - \rangle = \varphi_1$.*

Zadanie 18. Wywnioskuj z poprzednich zadań, że jeżeli A, B są macierzami hermitowskimi i A jest dodatnio określona, to istnieje odwracalna P taka że PAP^* i PBP^* są diagonalne, ale być może dla każdej odwracalnej Q jedna z macierzy QAQ^{-1} , QBQ^{-1} nie jest diagonalna.

Zadanie 19. Udowodnij, że jeśli $T = T^*$, to $\sup\{|Tx| : x \in V, |x| \leq 1\} = \sup\{|\langle Tx, x \rangle| : x \in V, |x| \leq 1\}$. (Lewą stronę tej równości nazywamy *normą przekształcenia T* i oznaczamy $|T|$.)

Zadanie 20. Załóżmy że A jest macierzą samosprężoną i $A = PDP^*$, gdzie D ma na przekątnej $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$. Opisz wartości singularne A i opisz jej rozkład singularny.

Zadanie 21. Niech V będzie przestrzenią euklidesową. Udowodnij, że każdy $f \in V^*$ jest postaci $\langle \cdot, y \rangle$ (dla pewnego $y \in V$), rozważając odwzorowanie $V \ni y \mapsto \langle \cdot, y \rangle \in V^*$. (Wsk. pokaż, że to odwzorowanie jest liniowe i różnowartościowe – wywnioskuj, że jest na. Czy ten argument działa dla przestrzeni zespolonych?)

Zadanie 22. Niech $\Phi: V \rightarrow V^*$ będzie antyizomorfizmem zadanym wzorem $\Phi(v)(w) = \langle v, w \rangle$.

Zauważ że jeżeli $G = T^*$, tzn. dla każdych v, w $\langle v, T(w) \rangle = \langle G(v), w \rangle$, to $\Phi \circ G \circ \Phi^{-1} = T^*$, tzn. dla $v \in V^*$ mamy $\Phi \circ G \circ \Phi^{-1}(v^*)(w) = v^*(T(w))$.

Wywnioskuj że dwie definicje F^* się zgadzają (z dokładnością do utożsamienia V i V^* przez Φ).

Zadanie 23. (V unitarna) Udowodnij, że jeśli $(\forall v \in V)(\langle Tv, v \rangle = 0)$, to $T = 0$. Czy jest to prawdą również w przypadku rzeczywistym?

Zadanie 24. (V unitarna) Przekształcenie T nazywamy *normalnym*, jeśli $TT^* = T^*T$. Udowodnij, że przekształcenie normalne diagonalizuje się w bazie ortonormalnej.

Zadanie 25. W przestrzeni funkcji gładkich (nieskończenie wiele razy różniczkowalnych) o okresie 2π z iloczynem skalarnym $\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$ rozpatrzmy przekształcenie liniowe (*laplasjan*) $\Delta(f) = -f''$. Uzasadnij, że Δ jest przekształceniem samosprężonym i nieujemnie określonym. Znajdź możliwie dużo wektorów własnych Δ i sprawdź bezpośrednim rachunkiem ich ortogonalność.