

Wszystko dzieje się w skończenie wymiarowej przestrzeni euklidesowej/unitarnej V , chyba że treść zadania mówi inaczej.

Zadanie 1. Wyznacz postać kanoniczną i bazę ortonormalną w której jest ona przyjmowana dla ortogonalnych przekształceń $\mathbf{R}^n$ zadanych w bazie standardowej macierzami:

$$\text{a) } \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -\sqrt{6} \\ 1 & 3 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & -\sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{d) } \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix};$$

Zadanie 2. Wyznacz ortonormalną bazę wektorów własnych i macierz w tej bazie przekształcenia unitarnego, zadanego w standardowej bazie macierzą:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4+3i & 4i & -6-2i \\ -4i & 4-3i & -2-6i \\ 6+2i & -2-6i & 1 \end{pmatrix}.$$

Zadanie 3. Uzupełnij układ $(1, -1, i, 0)^\top, (-1, 0, i, -i)^\top$ do ortogonalnej bazy $\mathbf{C}^4$.

Zadanie 4. Uzasadnij, że jeśli ortogonalne przekształcenie $\mathbf{R}^6$ ma (rzeczywistą) wartość własną, to ma też przynajmniej dwa liniowo niezależne wektory własne.

Zadanie 5. Niech U będzie macierzą unitarną. Uzasadnij, że wszystkie wyrazy U^{100} są co do modułu nie większe niż 1. Podaj przykład macierzy A , której wyrazy są co do modułu nie większe niż 1, takiej że A^2 ma wszystkie wyrazy większe co do modułu niż 1.

Zadanie 6. Uzasadnij, że jeśli $|v| = |w|$, to istnieje przekształcenie ortogonalne/unitarne F , takie że $F(v) = w$.

Zadanie 7. Które przekształcenia ortogonalne/unitarne są samosprężone?

Zadanie 8. Udowodnij, że (a) $\ker(T^*) = \text{im}(T)^\perp$; (b) $\text{im}(T^*) = \ker(T)^\perp$.

Zadanie 9. Niech T będzie rzutem (tzn. niech spełnia $T^2 = T$ – wyjaśnij skąd nazwa). Udowodnij, że następujące warunki są równoważne:

- a) $T = T^*$; b) $TT^* = T^*T$; c) $\text{im}(T) = (\ker(T))^\perp$; d) T jest rzutem ortogonalnym na $\text{im}(T)$.

Zadanie 10. Załóżmy, że $v, w \in \text{Lin}(\{v_1, \dots, v_k\})$, oraz że $\langle v, v_i \rangle = \langle w, v_i \rangle$ dla $i = 1, 2, \dots, k$. Wykaż, że $v = w$.

Zadanie 11. A jest macierzą ortogonalną 4×4 . Wyznacz możliwy $\det A$, gdy:

- a) $\text{tr} A = 4$ b) $\text{tr} A = 0$, c) $\text{tr} A = 2$, d) $\text{tr} A \in (2, 4)$, e) $\text{tr} A \in (0, 2)$.

Co się zmieni, gdy $\text{tr} A < 0$?

Zadanie 12. Dla macierzy A z poprzedniego zadania, w każdym podpunkcie wyznacz możliwe postacie kanoniczne A (uwzględniając wartość $\det A$ i $\text{tr} A$).

Zadanie 13. Uzasadnij, że jeśli T jest samosprężone, to $\exp(iT)$ jest unitarne, Uzasadnij, że każde przekształcenie unitarne jest postaci $\exp(iT)$ dla pewnego samosprężonego T (wskazówka: twierdzenia spektralne).

Zadanie 14. (V jest rzeczywista. “Odbicie” oznacza symetrię względem warstwy podprzestrzeni kowymiary 1, czyli względem hiperpłaszczyzny niekoniecznie przechodzącej przez 0; równoważnie, warstwy dopełnienia ortogonalnego niezerowego wektora.)

- Z twierdzenia spektralnego dla przekształceń ortogonalnych V wywnioskuj, że każde takie przekształcenie jest złożeniem co najwyżej $\dim V$ odbić (*wskazówka: pokaż najpierw, że obrót jest złożeniem dwóch odbić*).
- Uzasadnij, że każda translacja jest złożeniem 2 odbić.
- Uzasadnij, że dowolna izometria V jest złożeniem co najwyżej $\dim V + 2$ odbić.
- (*) Udowodnij zupełnie innym sposobem, że każda izometria jest złożeniem co najwyżej $\dim V + 1$ odbić.

Zadanie 15. Uzasadnij zupełnie inną metodą niż w poprzednim zadaniu, że tak naprawdę w ostatnim podpunkcie wystarczy $\dim V + 1$ odbić. (*Wskazówka: dwie izometrie n -wymiarowej przestrzeni są równe dokładnie wtedy, gdy zgadzają się na $n + 1$ punktach. Rozważ odbicia w symetrycznych odcinkach łączących punkt z jego obrazem.*)

Zadanie 16. Udowodnij stwierdzenie spektralne dla przekształceń ortogonalnych wg następującego schematu. Dla $F \in \text{End}(V)$ ortogonalnej (tu V jest rzeczywistą przestrzenią liniową):

- Pokaż że jeżeli $v \perp \bar{v}$ w $V_{\mathbb{C}}$, to $\text{Re}(v) \perp \text{Im}(v)$.
- Sprawdź że jeżeli $v \in V_{\mathbb{C}}$ jest wektorem własnym $F_{\mathbb{C}}$ odpowiadającym wartości własnej $\lambda = e^{i\theta} \notin \mathbb{R}$, to $|\text{Re}(v)| = |\text{Im}(v)|$.
- Wywnioskuj stąd, że dla unormowanego v jak w poprzednim podpunkcie, układ $\sqrt{2}\text{Re}(v), \sqrt{2}\text{Im}(v)$ jest ortonormalny.
- Wywnioskuj twierdzenie spektralne dla ortogonalnych endomorfizmów przestrzeni euklidesowej (tzn. że F ma w pewnej bazie ON postać kanoniczną): opisz, jak z bazy ON $V_{\mathbb{C}}$ diagonalizującej $F_{\mathbb{C}}$ uzyskać bazę ON V w której F ma postać kanoniczną.

Zadanie 17.

- Pokaż, że $(\forall v, w, s \in V)(|v + w + s| \leq |v| + |w| + |s|)$.
- Wywnioskuj, że dla dowolnych $a, b, c \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$\sqrt{(2a+b)^2 + (2b+c)^2 + (2c+a)^2 + (a+b+c)^2} \leq \sqrt{2(a^2+b^2)} + \sqrt{2(b^2+c^2)} + \sqrt{2(c^2+a^2)}.$$

Zadanie 18. Niech $v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_k$ spełniają, dla dowolnych $i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$, warunek $\langle v_i, v_j \rangle = \langle w_i, w_j \rangle$. Udowodnij, że istnieje przekształcenie ortogonalne/unitarne U , takie że $U(v_i) = w_i$ dla $i \in \{1, 2, \dots, k\}$.

Zadanie 19. Udowodnij, że jeśli $U: V \rightarrow V$ jest unitarne, to dla dowolnego $v \in V$ zachodzi $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} U^k v = Pv$, gdzie P jest rzutem ortogonalnym na podprzestrzeń $\{w \in V : Uw = w\}$.