

Zadanie 1. Znajdź pole równoległoboku rozpiętego przez wektory $(1, 5, 2, 1, 3)^\top, (-1, 4, 2, -2, 0)^\top$, oraz objętość równoległościanu rozpiętego przez wektory $(1, 2, 3, 4)^\top, (1, -1, 0, 1)^\top, (0, 1, 1, -1)^\top$.

Zadanie 2. Użyj macierzy Grama by wyznaczyć odległość punktu $(1, 2, 3, 4)^\top$ od płaszczyzny $\text{Lin}(\{(1, -1, 1, -1)^\top, (0, 1, 2, -1)^\top\})$ (korzystając z wzoru na objętość równoległościanu w $\mathbf{R}^4$).

Zadanie 3. Oblicz n -wymiarową objętość równoległościanu rozpiętego przez n wektorów:

- a) $(1, -1, 1, -1)^\top, (1, 1, 1, 1)^\top, (1, 0, -1, 0)^\top, (0, 1, 0, -1)^\top$;
- b) $(1, 0, 0, 2, 5)^\top, (0, 1, 0, 3, 4)^\top, (0, 0, 1, 4, 7)^\top, (2, -3, 4, 11, 12)^\top, (0, 0, 0, 0, 1)^\top$.

Zadanie 4. Sprawdź, że macierz Grama bazy B przestrzeni euklidesowej V jest równa macierzy formy kwadratowej $V \ni v \mapsto |v|^2 \in \mathbf{R}$ w bazie B .

Zadanie 5. Uzasadnij że dla $W \leq V$ i $v \in V$, jeżeli $v \notin W^\perp$, to kąt między v i W (czyli infimum kątów między v i w dla $w \in W$) to kąt między v i $\pi_W(v)$. (Wskazówka: zauważ, że wystarczy pokazać to w $\mathbf{R}^3$.)

Zadanie 6. Udowodnij (np. korzystając z poprzedniego zadania) że dla $W \leq V$ i $v \in V$ zachodzi $d(v, W) = \sin(\theta)|v|$, gdzie θ to kąt między W i v .

Zadanie 7. Czy zbiór $\{(x_1, x_2, x_3, x_4)^\top \in \mathbf{R}^4 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_3x_4 + 2x_4x_1 = 1\}$ jest ograniczony?

Zadanie 8. Rozważmy trójwymiarową kwadrykę M w $\mathbf{R}^4$ adaną równaniem $Q(v) = 1$, gdzie $Q(v) = 2v_1v_2 - 2v_3v_4$.

Zdiagonalizuj Q w bazie ortonormalnej, a następnie uzasadnij że M :

- a) ma przekrój (z płaszczyzną), który jest hiperbolą,
- b) ma przekrój (z płaszczyzną), który jest okręgiem,
- c) ma przekrój (z trójwymiarową przestrzenią), który jest hiperboloidą,
- d) ma przekrój (z trójwymiarową przestrzenią), który jest stożkiem,
- e) powstaje przez obrót pewnej hiperboloidy dwupowłokowej wokół pewnej płaszczyzny.

Uwaga: płaszczyzny i przestrzenie w tym zadaniu nie muszą być liniowymi podprzestrzeniami, chodzi o kształt geometryczny!

Zadanie 9. Oblicz kąt między główną przekątną n -wymiarowej kostki a jej k -wymiarową ścianą. (Kostka w $\mathbf{R}^n$ to równoległościan rozpięty przez wektory standardowej bazy. Jedną z jego głównych przekątnych jest odcinek łączący $(0, \dots, 0)^\top$ i $(1, \dots, 1)^\top$.)

Zadanie 10. Niech $M \in M_{n \times n}(\mathbf{R})$ będzie macierzą symetryczną. Udowodnij równoważność następujących warunków:

- a) w $\mathbf{R}^n$ ze standardowym iloczynem skalarnym istnieje n liniowo niezależnych wektorów, których macierzą Grama jest M ;
- b) w pewnej przestrzeni euklidesowej istnieje n liniowo niezależnych wektorów, których macierzą Grama jest M ;
- c) M jest dodatnio określona;
- d) na $\mathbf{R}^n$ można zadać iloczyn skalarny tak, by macierzą Grama bazy standardowej była macierz M .

Sprawdź, że ten sam dowód działa w przypadku unitarnym.

Zadanie 11. Czy istnieje iloczyn skalarny na $\mathbf{R}^3$, taki że cosinusy kątów między wektorami e_1, e_2, e_3 , wynoszą $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$?

Zadanie 12. Czy istnieją punkty a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 w $\mathbf{R}^n$ (dla pewnego n), takie że macierzą odległości

$(d(a_i, a_j))$ jest macierz $\begin{pmatrix} 0 & 3 & \sqrt{5} & \sqrt{5} & 2\sqrt{2} \\ 3 & 0 & \sqrt{14} & \sqrt{14} & \sqrt{17} \\ \sqrt{5} & \sqrt{14} & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{17} \\ \sqrt{5} & \sqrt{14} & \sqrt{2} & 0 & 3 \\ 2\sqrt{2} & \sqrt{17} & \sqrt{17} & 3 & 0 \end{pmatrix}$? Jeśli tak, to znajdź najmniejsze możliwe n .

Zadanie 13. Udowodnij, że dla $A = (a_{ij}) \in M_{n \times n}(\mathbf{R})$ zachodzi nierówność (Hadamarda) $(\det(A))^2 \leq \prod_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right)$.

Zadanie 14. (V unitarna, $F, G : V \rightarrow V$ liniowe)

- Uzasadnij, że jeśli F jest unitarne a 1 nie jest jego wartością własną, to $G = i(F - \text{id})^{-1}(F + \text{id})$ jest samosprężone.
- Uzasadnij, że jeśli G jest samosprężone, to $F = (G - i \text{id})^{-1}(G + i \text{id})$ jest unitarne.

Zadanie 15. Niech A będzie rzeczywistą macierzą kwadratową i antysymetryczną ($A^\top = -A$). Udowodnij, że $\chi_A(x)$ nie ma niezerowych pierwiastków rzeczywistych (wskazówka: rozważ iA).

Zadanie 16. Wykaż, że objętość równoległościanu spełnia $V(a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_l) \leq V(a_1, \dots, a_k)V(b_1, \dots, b_l)$.

Zadanie 17. Wykaż, że jeśli układ k wektorów w n wymiarowej rzeczywistej przestrzeni euklidesowej ma tę własność, że każde dwa z nich tworzą kąt rozwarty, to $k \leq n + 1$.

Zadanie 18. Uzasadnij, że w $\mathbf{R}_n[X]$ z iloczynem skalarnym $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(x)Q(x)dx$ odległość X^n od $\text{Lin}\{1, X, \dots, X^{n-1}\}$ wynosi $\left(\binom{2n}{n} \sqrt{2n+1} \right)^{-1}$.

Zadanie 19. (V unitarna) Uzasadnij, że każde przekształcenie liniowe $V \rightarrow V$ jest kombinacją liniową czterech przekształceń unitarnych.

Zadanie 20. Załóżmy, że wektory $v_1, \dots, v_n$ rozpinają $(n-1)$ -wymiarową podprzestrzeń przestrzeni euklidesowej V . Jaka jest $(n-1)$ -wymiarowa objętość zbioru $\{\sum_{i=1}^n t_i v_i : 0 \leq t_1, \dots, t_n \leq 1\}$?