

Zadanie 1. Niech $V = \mathbf{R}[X]$, $W = \{P \in V : P(0) = 0\}$. Uzasadnij, że jeśli Q i S należą do tej samej warstwy W , to $Q(0) = S(0)$. Czy jest też odwrotnie? Uzasadnij, że w każdej warstwie W jest dokładnie jeden wielomian stopnia 0. Wyznacz $\dim(V/W)$.

Zadanie 2. Pokaż że dla baz $b_1, b_2, \dots, b_n$ oraz $c_1, \dots, c_m$ przestrzeni V i W odpowiednio, układ $(b_1, 0), \dots, (b_n, 0), (0, c_1), \dots, (0, c_m)$ jest bazą $V \oplus W$.

Zadanie 3. Sprawdź że jeżeli M jest dowolną macierzą $n \times m$, a $e_i \in K^n$, $e_j \in K^m$ to standardowe wektory bazowe, to $e_i^\top M e_j$ jest ij -tym wyrazem M .

Zadanie 4. Wywnioskuj z zadania 3, że jeżeli M, N spełniają $v^\top M w = v^\top N w$ dla każdych v, w , to $M = N$.

Zadanie 5. Niech $F : V \rightarrow W$ będzie funkcją. Udowodnij, że F jest liniowa $\iff F \leq V \oplus W$ (tzn. wykres F jest podprzestrzenią $V \oplus W$).

Zadanie 6. Sprawdź że:

- jeżeli F_1, F_2 są liniowe, to $F_1 \oplus F_2$ jest liniowe.
- $F_1 \oplus F_2$ jest „na” lub 1-1 wtedy i tylko wtedy gdy F_1 i F_2 są „na” lub 1-1 (odpowiednio).
- jeżeli $V_1 \cong V_2$ i $W_1 \cong W_2$, to $V_1 \oplus W_1 \cong V_2 \oplus W_2$.

Zadanie 7. Załóżmy że V jest dowolną przestrzenią liniową, a $A, B \subseteq V$ są rozłączne i $A \cup B$ jest liniowo niezależny. Uzasadnij że $\text{Lin}(A) \cap \text{Lin}(B) = \{\vec{0}\}$

Zadanie 8. Oblicz wymiary następujących przestrzeni:

- $\{P \in \mathbf{R}_{50}[X] : P(-X) = P(X)\}$,
- $\{P \in \mathbf{R}_{10}[X] : \int_{-1}^0 P(x) dx = P'(-7) = 0\}$,
- $\{(x_1, \dots, x_{100})^\top \in \mathbf{R}^{100} : \sum_{i=1}^{100} (-1)^i x_i = \sum_{i=1}^{100} x_i = \sum_{i=1}^{50} x_{2i} = 0\}$,
- $\{P \in \mathbf{R}_3[X] : X P'''(X) + P''(X) = 0, P'(-1) + P(0) = 0\}$,
- $\{(x_1, \dots, x_{100})^\top \in \mathbf{R}^{100} : \sum_{i=1}^{100} x_i^2 = \sum_{i=1}^{50} x_{2i-1} = 0\}$,

Zadanie 9. Jeśli $b_1, \dots, b_n$ jest bazą V , zaś $F : V \rightarrow W$ jest izomorfizmem, to $F(b_1), \dots, F(b_n)$ rozpinają W . Jak bardzo potrafisz osłabić założenia tego twierdzenia?

Zadanie 10. Udowodnij lub obal:

- Jeśli układ wektorów $v_1, \dots, v_n \in V$ jest lz, a $F : V \rightarrow W$ jest przekształceniem liniowym, to układ wektorów $F(v_1), \dots, F(v_n)$ też jest lz.
- (dla formalistów) Jeśli zbiór $\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$ jest lz, a $F : V \rightarrow W$ jest przekształceniem liniowym, to zbiór $\{F(v_1), \dots, F(v_n)\}$ też jest lz.
- Jeśli układ wektorów $v_1, \dots, v_n \in V$ jest lnz, a $F : V \rightarrow W$ jest przekształceniem liniowym, to układ wektorów $F(v_1), \dots, F(v_n)$ też jest lnz.

Zadanie 11. Udowodnij, że jeśli $W \leq V$, zaś $F : W \rightarrow U$ jest przekształceniem liniowym, to istnieje przekształcenie liniowe $\tilde{F} : V \rightarrow U$, takie że F jest obcięciem $\tilde{F}$ do W . Znajdź takie $\tilde{F}$ dla $V = \mathbf{R}_2[X]$, $W = \{P \in \mathbf{R}_2[X] : P(3) = 0\}$, $U = \mathbf{R}_1[X]$, $F(P) = \frac{P(X)}{X-3}$. Ile jest takich $\tilde{F}$?

Zadanie 12. Niech wektory $v_1, \dots, v_n \in V$ będą liniowo niezależne, a $w_1, \dots, w_n \in W$ będą dowolne. Uzasadnij, że istnieje odwzorowanie liniowe $F : V \rightarrow W$, takie że $F(v_i) = w_i$ dla $i = 1, \dots, n$ (wskazówka: dopełnij $v_1, \dots, v_n$ do bazy i skorzystaj z odpowiedniego stwierdzenia z wykładu).

Zadanie 13. Udowodnij, że jeśli $F : V \rightarrow W$ jest monomorfizmem (tzn. jest liniowe i 1-1), to istnieje przekształcenie liniowe $G : W \rightarrow V$, takie że $G \circ F = \text{id}_V$ (Dlaczego nie wynika stąd, że każdy monomorfizm jest izomorfizmem?). Znajdź macierze dwóch różnych takich G dla $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

zadanego macierzą $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Zadanie 14. Niech $V = \mathbb{R}^3$, zaś W niech będzie prostą w $\mathbb{R}^3$ zadaną równaniem $x = \frac{y}{3} = -z$.

- Sprawdź, czy wektory $v_1 + W$, $v_2 + W$ są lnz w V/W , dla (i) $v_1 = (1, 2, 3)^\top$, $v_2 = (4, 5, 6)^\top$; (ii) $v_1 = (2, 6, -2)^\top$, $v_2 = (0, 1, 2)^\top$; (iii) $v_1 = (-1, 0, 2)^\top$, $v_2 = (0, 3, 1)^\top$; (iv) $v_1 = (0, 0, 1)^\top$, $v_2 = (0, 1, 0)^\top$.
- Wskaż bazę B przestrzeni V/W i oblicz $[v_1]_B$, $[v_2]_B$ dla wszystkich powyższych v_1, v_2 .
- Niech $p : V \rightarrow V/W$ będzie naturalnym rzutowaniem (zadany przez $p(v) = v + W$). Sprawdź, że $p|_{W^\perp}$ jest izomorfizmem liniowym (gdzie $W^\perp$ to płaszczyzna w $\mathbb{R}^3$ prostopadła do W). Czy potrafisz uzasadnić, że to samo będzie prawdą dla dowolnej prostej W przechodzącej przez 0 w $V = \mathbb{R}^3$?

Zadanie 15. Niech $W, U \leq V$ spełniają $W + U = V$. Uzasadnij, że jeśli $W \cap U = \{0\}$, to odzorowanie $W \oplus U \rightarrow V$ zadane wzorem $(w, u) \mapsto w + u$ jest izomorfizmem liniowym.¹

Zadanie 16. Czy jest prawdą, że dla dowolnych skończenie wymiarowych podprzestrzeni U, V, W dowolnej przestrzeni liniowej zachodzi wzór (udowodnij lub podaj kontrprzykład):

$$\dim(U + V + W) = \dim(U) + \dim(V) + \dim(W) - \dim(U \cap V) - \dim(V \cap W) - \dim(W \cap U) + \dim(U \cap V \cap W)$$

Zadanie 17. Niech $V = \{(x, y, z)^\top \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + z = 0\}$, $W = \{(x, y, z)^\top \in \mathbb{R}^3 : x = \frac{y}{3} = -\frac{z}{7}\}$. Wykaż, że

- $\mathbb{R}^3$ nie jest sumą prostą V i W , tzn. odwzorowanie $V \times W \ni (v, w) \mapsto v + w \in \mathbb{R}^3$ nie jest izomorfizmem.
- $V \oplus W \cong \mathbb{R}^3$.

Zadanie 18. Sprawdź że:

- dla dowolnych $V_1 \xrightarrow{F_1} W_1 \xrightarrow{G_1} U_1$, $V_2 \xrightarrow{F_2} W_2 \xrightarrow{G_2} U_2$ zachodzi

$$(G_1 \oplus G_2) \circ (F_1 \oplus F_2) = ((G_1 \circ F_1) \oplus (G_2 \circ F_2)),$$

- jeżeli $F_1 : V_1 \rightarrow V_2$ i $F_2 : V_2 \rightarrow V_3$ są liniowe, to $(F_2 \circ F_1)^* = F_1^* \circ F_2^*$.

Zadanie 19. Oblicz wymiar przestrzeni $\{P \in \mathbb{R}_{100}[X] : \int_{-1}^1 e^{-x^2} P(x) dx = \int_{-2}^2 e^{-x^2} P(x) dx = 0\}$. Co potrafisz powiedzieć o wymiarze przestrzeni $\{P \in \mathbb{R}_{100}[X] : \int_{-1}^1 e^{-x^2} P(x) dx = \int_{-2}^2 e^{-x^2} P(x) dx = \dots = \int_{-100}^{100} e^{-x^2} P(x) dx = 0\}$?

Zadanie 20. Niech dla $i = 0, \dots, n$ funkcja $f_i : V_i \rightarrow V_{i+1}$ będzie przekształceniem liniowym, przy czym $\ker(f_{i+1}) = \text{im}(f_i)$ (dla $i = 0, \dots, n-1$). Załóżmy ponadto, że $V_0 = V_{n+1} = \{0\}$. Udowodnij, że $\sum_{i=1}^n (-1)^i \dim(V_i) = 0$.

Zadanie 21. Niech $F : V \rightarrow W$ będzie przekształceniem liniowym, U podprzestrzenią $\ker(F)$, zaś $p : V \rightarrow V/U$ odwzorowaniem ilorazowym ($p(v) = v + U$). Uzasadnij, że istnieje jedyne odwzorowanie liniowe $f : V/U \rightarrow W$, takie że $f \circ p = F$.

¹Przypomnienie: w tym wypadku mówimy, że V jest (wewnętrzną) sumą prostą W i U , piszemy $V = W \oplus U$.