

Zadanie 1. Niech $W \leq V$. Uzasadnij że W jest (a) jądrem (b) obrazem pewnego odwzorowania liniowego $V \rightarrow V$ (niekoniecznie tego samego).

Zadanie 2. Udowodnij, że jeśli $(v_1^*, \dots, v_k^*)$ jest bazą dualną do bazy $B = (v_1, \dots, v_k)$ przestrzeni V , to dla każdego $v \in V$ mamy $[v]_B = (v_1^*(v), \dots, v_k^*(v))^T$.

Zadanie 3. Niech $a(t) \in \mathbf{R}[t]$ będzie ustalonym wielomianem. Które z następujących funkcji są funkcjami liniowymi na $\mathbf{R}_n[t]$:

- a) $f(P) = \int_{-1}^1 a(t)P(t) dt$, b) $f(P) = \int_0^1 a(t)P(t^2) dt$, c) $f(P) = \int_0^1 a(t)[P(t)]^2 dt$,
d) $f(P) = P'''(-1)$, e) $f(P) = P(1)P'(-1)$?

Zadanie 4. Dla poniższych układów równań znajdź rozwiązanie ogólne.

$$\text{a) } \begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 12x_4 = 10 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 4 \\ x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 4x_4 = 2 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} -9x_1 + 10x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 7 \\ -4x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 = 5 \\ 7x_1 + 5x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 4 \\ 6x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + 7x_3 - 4x_4 + x_5 = 11 \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 3x_5 = 6 \end{cases}$$

Zadanie 5. Wyznacz układ fundamentalny rozwiązań układu jednorodnego:

$$\text{a) } \begin{cases} x_1 - x_3 + x_5 = 0 \\ x_2 - x_4 + x_6 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_5 - x_6 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_6 = 0 \\ x_1 - x_4 + x_5 = 0 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 + 5x_5 = 0 \\ 7x_1 + 10x_2 + x_3 + 6x_4 + 5x_5 = 0 \end{cases}$$

Zadanie 6. Dla jakich prawych stron układy z poprzedniego zadania pozostają niesprzeczne?

Zadanie 7. Znajdź wielomian $P(X)$ o współczynnikach rzeczywistych

- a) stopnia 2, taki że $P(1) = 8$, $P(-1) = 2$ i $P(2) = 14$,
b) stopnia 3, taki że $P(-2) = 1$, $P(-1) = 3$, $P(1) = 13$ i $P(2) = 33$.

Zadanie 8. Niech $W < V$, $\dim(V) < \infty$, $f \in W^*$. Uzasadnij, że istnieje $\bar{f} \in V^*$, takie że $\bar{f}|_W = f$. (Wskazówka: rozszerz bazę W do bazy V .)

Zadanie 9. Niech $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in (\mathbf{R}^3)^*$ będą dane wzorami $\varphi_1((x, y, z)^T) = x + 2y - z$, $\varphi_2((x, y, z)^T) = y + z$, $\varphi_3((x, y, z)^T) = -x + y + 2z$. Uzasadnij, że $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ jest bazą $(\mathbf{R}^3)^*$; do jakiej bazy $\mathbf{R}^3$ jest ona dualna?

Zadanie 10. Znajdź jednorodny układ równań liniowych złożony z

- a) dwóch b) trzech c) czterech

równań, którego zbiór rozwiązań to $\text{Lin}((1, 4, -2, 2, -1)^T, (1, 13, -1, 2, 9)^T, (2, 7, -8, 4, -5)^T)$.

Zadanie 11. Wyłumacz, jak mając układ równań opisujący podprzestrzeń $W < \mathbf{R}^n$ i wektor $v \in \mathbf{R}^n$ wyznaczyć układ równań opisujący warstwę $v + W$. Opisz zbiór $\{(1, 0, -1, 1)^T + t(1, 2, 1, -2)^T + s(-1, 3, 4, 0)^T + u(-1, 8, 9, -2)^T : t, s, u \in \mathbf{R}\}$ układem równań.

Zadanie 12. Niech $B \in M_{(k+1) \times n}(\mathbf{R})$ będzie macierzą otrzymaną z $A \in M_{k \times n}(\mathbf{R})$ przez dopisanie (u dołu) jednego wiersza. Czy może się zdarzyć, że wymiar $\text{im}(F_B)$ jest mniejszy niż wymiar $\text{im}(F_A)$?

Zadanie 13. Uzasadnij, że zbiór prawych stron dla których układ o ustalonej macierzy głównej A jest niesprzeczny jest podprzestrzenią liniową; uzasadnij, że wymiar tej podprzestrzeni plus wymiar przestrzeni rozwiązań układu jednorodnego o tej samej macierzy głównej A jest równy liczbie kolumn A .

Zadanie 14. Uzasadnij, że jeśli układ ma co najmniej 2 rozwiązania, to rząd jego macierzy głównej jest mniejszy niż jej liczba kolumn.

Zadanie 15. Uzasadnij, że jeśli rząd macierzy głównej układu jest równy liczbie jej wierszy, to układ jest niesprzeczny. Podaj przykład wskazujący, że nie jest to konieczny warunek niesprzeczności.

Zadanie 16. Udowodnij, że jeśli układ jednorodny ma więcej niewiadomych niż równań, to ma niezerowe rozwiązanie. Udowodnij, że jeśli układ ma więcej równań niż niewiadomych, to można zmienić (lub nie) jego prawe strony tak, by stał się (lub pozostał) sprzeczny.

Zadanie 17. Zinterpretuj operacje kolumnowe w języku układów równań.

Zadanie 18. Oblicz $m_B(D)$, gdzie $D: \mathbf{R}_n[X] \rightarrow \mathbf{R}_n[X]$ dane jest wzorem $D(P) = P'$, zaś B jest bazą

a) $(1, X, \dots, X^n)$, b) $(X^n, X^{n-1}, \dots, X, 1)$, c) $(1, X-1, \frac{1}{2}(X-1)^2, \dots, \frac{1}{n!}(X-1)^n)$.

Zadanie 19. Niech V_1, V_2 będą skończenie wymiarowe, a $F: V_1 \rightarrow V_2$ będzie liniowe. Rozstrzygnij prawdziwość implikacji:

- a) F jest „na” $\Rightarrow F^*$ jest 1-1, b) F jest 1-1 $\Rightarrow F^*$ jest „na”,
c) F^* jest „na” $\Rightarrow F$ jest 1-1, d) Jeśli F^* jest 1-1 $\Rightarrow F$ jest „na”.

Zastanów się, czy założenie skończoności wymiaru jest istotne.

Zadanie 20. Uzasadnij, że $V \cong W$ implikuje, że $W^* \cong V^*$ (nawet gdy V nie jest skończenie wymiarowa).

Zadanie 21. Niech wierszami macierzy B będą wektory fundamentalnego układu rozwiązań układu $A^T X = 0$. Udowodnij, że $\ker F_B = \text{im } F_A$.

Zadanie 22. Oznaczmy przez $(K^n)'$ przestrzeń liniową wektorów wierszowych długości $n \in \mathbf{N}$.¹

- a) Sprawdź że $F: (K^n)' \rightarrow (K^n)^*$ zadane wzorem $F(v)(w) = vw$ dla każdego $w \in K^n$ jest izomorfizmem (zauważ, że wymiary się zgadzają, więc można pomnożyć v i w jako macierze).
b) Zauważ że $G: K^n \rightarrow (K^n)'$ zadane wzorem $G(v) = v^T$ jest izomorfizmem.
c) Załóżmy że $B = (b_1, \dots, b_n)$ jest bazą K^n . Kiedy $G(B) = (G(b_1), \dots, G(b_n))$ to baza dualna do B ?

Zadanie 23. Rozważmy odwzorowanie $F: V \rightarrow W$ i bazy B, C skończenie wymiarowych przestrzeni V, W . Niech $A = m_C^B(F)$. Oznaczając przez B^*, C^* bazy dualne do B i C odpowiednio, sprawdź że $m_{B^*}^{C^*}(F^*) = A^T$.

Zadanie 24. Niech $W < K^n$, $W = \text{Lin}\{v_1, \dots, v_k\}$, $\dim W = s$. Udowodnij, że W można opisać układem $n-s$ równań.

Zadanie 25. Jak bardzo wynik metody eliminacji zależy od dokonywanych wyborów? Czy potrafisz podać przykład układu jednorodnego, do którego można zastosować metodę Gaussa na dwa różne sposoby i otrzymać

- a) dwa różne fundamentalne układy rozwiązań?
b) dwa różne podziały zmiennych na wolne i związane?

Zadanie 26. Uzasadnij, że $\text{rk}(A+B) \leq \text{rk}(A) + \text{rk}(B)$.

Zadanie 27. Niech $f, g \in V^*$ spełniają $\ker(f) = \ker(g)$. Udowodnij, że istnieje skalar $\alpha \neq 0$, taki że $f = \alpha g$.

Zadanie 28. Udowodnij, że ślad $\text{tr}: M_{n \times n}(K) \rightarrow K$ jest funkcjonałem na przestrzeni macierzy $n \times n$ z wiadomymi działaniami. Wykaż, że dla każdego funkcjonału f na tej przestrzeni istnieje jedyna macierz $A \in M_{n \times n}(K)$, taka że $f(X) = \text{tr}(AX)$ dla wszystkich $X \in M_{n \times n}(K)$.

¹W geometrii różniczkowej, a więc i w ogólnej teorii względności, funkcjonały i wektory wierszowe nazywa się *kowektorami*.