

Zawsze zakładamy $\dim(V), \dim(W) < \infty$ (chyba że zadanie mówi inaczej). $\text{Hom}(V, W)$ to przestrzeń przekształceń liniowych z V do W .

Zadanie 1. Czy $\mathbf{R}^3$ jest sumą prostą podprzestrzeni

- a) $\text{Lin}\{(1, 2, 3)^\top\}, \left\{ (x, y, z)^\top \mid \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \right\}, \{(t, 0, 0)^\top \mid t \in \mathbf{R}\}$?
- b) $\{(x, y, z)^\top \mid x + y + z = 0\}, \left\{ (x, y, z)^\top \mid \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \right\}$?
- c) $\text{Lin}(\{(1, 2, 1)^\top, (-2, 1, 3)^\top\}), \text{Lin}(\{(1, 6, 7)^\top\})$?
- d) $\{(x, y, z)^\top \mid x + 2y - z = 0\}, \text{Lin}(\{(1, 2, -1)^\top\})$?

Zadanie 2. Sprawdź że dla dowolnych $A \in M_{n \times k}(\mathbf{R}), B \in M_{k \times n}(\mathbf{R})$ zachodzi $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$. Wskazówka: wyrachuj to z definicji śladu i mnożenia macierzy.

Zadanie 3. Niech $B \in M_{n \times n}(\mathbf{R})$ będzie pewną ustaloną macierzą. Czy są podprzestrzeniami $M_{n \times n}(\mathbf{R})$ następujące podzbiory tej przestrzeni:

- a) $\{A \mid AB = BA\}$; b) $\{A \mid ABA^{-1} = B\}$; c) $\{A \mid BAB^{-1} = A\}$;
 d) $\{A \mid AB + BA = 0\}$; e) $\{A \mid A^\top BA = B\}$; f) $\{A \mid B^\top AB = A\}$;
 g) $\{A \mid A^\top B - BA = 0\}$; h) $\{A \mid (\forall C \in M_{n \times n}(\mathbf{R}))(\text{tr}(A^\top BC) = 0)\}$;

Zadanie 4. Udowodnij, że

- a) $M_{n \times n}(\mathbf{R}) = \{A \in M_{n \times n}(\mathbf{R}) \mid A^\top = A\} \oplus \{A \in M_{n \times n}(\mathbf{R}) \mid A^\top = -A\}$;
 b) $M_{n \times n}(\mathbf{R}) = \{A \in M_{n \times n}(\mathbf{R}) \mid \text{tr}(A) = 0\} \oplus \{tI \mid t \in \mathbf{R}\}$;
 c) $M_{n \times n}(\mathbf{C}) = \{A \in M_{n \times n}(\mathbf{C}) \mid A^\top = \bar{A}\} \oplus \{A \in M_{n \times n}(\mathbf{C}) \mid A^\top = -\bar{A}\}$. (Tu $\bar{A}$ oznacza sprzężenie każdego współczynnika z osobna.)

Zadanie 5. Zauważ, że $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ jest bazą $M_{2 \times 2}(\mathbf{R})$. Napisz macierze przekształceń $M \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} M, M \mapsto M \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ w tej bazie.

Zadanie 6. Niech $V = V_1 \oplus V_2$.

- a) Pokaż, że jeśli $F_i : V_i \rightarrow W$ są liniowe, to istnieje jedyne liniowe $F : V \rightarrow W$, takie że $F|_{V_i} = F_i$. ($i = 1, 2$)
 b) Załóżmy, że $F, G : V \rightarrow W$ są liniowe. Udowodnij, że jeśli $F|_{V_1} = G|_{V_1}, F|_{V_2} = G|_{V_2}$, to $F = G$.

Zadanie 7. Udowodnij, że jeśli P, Q, R to wielomiany takie że $P(X)Q(X) = R(X)$, A jest macierzą kwadratową, a $F \in \text{End}(V)$, to a) $P(A)Q(A) = R(A)$, b) $P(F) \circ Q(F) = R(F)$.

Zadanie 8. Wywnioskuj z zadania 2, że dla $F \in \text{End}(V)$, $\text{tr}(F)$ jest dobrze określony (tzn. $\text{tr}_B(F)$ nie zależy od wyboru bazy B).

Zadanie 9. Uzasadnij, że $\text{tr} : M_{n \times n}(\mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{R}$ jest funkcjonalem liniowym (tzn. $\text{tr} \in (M_{n \times n}(\mathbf{R}))^*$).

Zadanie 10. Oblicz wielomian charakterystyczny $F : \mathbf{R}_n[X] \rightarrow \mathbf{R}_n[X]$, jeśli

- a) $F(P(X)) = P'(X)$;
 b) $F(P(X)) = \frac{1}{X} \int_0^X P(Y) dY$;
 c) $F(P(X)) = P(3X + 1)$.

Zadanie 11. Czy jest prawdą, że (w punkcie b przyjmujemy $\varepsilon = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$)

- a) $\mathbf{R}_{12}[X] = \{P \in \mathbf{R}_{12}[X] \mid \text{stopień } P \text{ jest } \leq 6\} \oplus \{P \in \mathbf{R}_{12}[X] \mid \text{stopień } P \text{ jest } \geq 7\}$?
- b) $\mathbf{C}[X] = \{P \in \mathbf{C}[X] \mid P(\varepsilon X) = P(X)\} \oplus \{P \in \mathbf{C}[X] : P(\varepsilon X) = \varepsilon P(X)\} \oplus \{P \in \mathbf{C}[X] \mid P(\varepsilon X) = \varepsilon^2 P(X)\}$?

Zadanie 12. Pewne trzy proste w $\mathbf{R}^3$ przechodzące przez 0 mają tę własność, że kąt między każdymi dwiema z nich jest $> 60^\circ$. Czy wynika stąd, że $\mathbf{R}^3$ jest sumą prostą tych trzech prostych?

Zadanie 13. Niech $F : V \rightarrow W$.

- Czy jeśli $V = V_1 \oplus V_2$, to $\text{im}(F) = F[V_1] \oplus F[V_2]$?
- Czy jeśli $W = W_1 \oplus W_2$, to $V = F^{-1}[W_1] \oplus F^{-1}[W_2]$?
- Czy jeśli $V = V_1 \oplus V_2$ i $F|_{V_1}, F|_{V_2}$ są $1 - 1$, to F jest $1 - 1$?
- Czy jeśli $W = W_1 \oplus W_2$ i $W_1, W_2 \subseteq \text{im}(F)$, to F jest na?

Zadanie 14. Niech $V_1, V_2, V_3 \leq V$. Załóżmy, że $\dim(V_1) + \dim(V_2) + \dim(V_3) = \dim(V)$, $V_2 \cap V_3 = \{0\}$, $V_1 \cap (V_2 + V_3) = \{0\}$. Udowodnij, że $V = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$. Uogólnij na większą liczbę podprzestrzeni.

Zadanie 15. Znajdź (jakąś) podprzestrzeń dopełniczą do $W \leq V$, jeśli

- $V = \mathbf{R}^3$, $W = \text{Lin}(\{(1, 2, 0)^\top, (0, 1, 1)^\top\})$;
- $V = \mathbf{R}_4[X]$, $W = \{P \in \mathbf{R}_4[X] \mid P'(1) + 2P(0) = 0\}$;
- $V = \mathbf{R}_3[X]$, $W = \{P \in \mathbf{R}_3[X] \mid \int_{-1}^1 P(x)dx = \int_{-1}^1 x^2 P(x)dx = 0\}$;
- $V = \mathbf{R}_3[X]$, $W = \{P \in \mathbf{R}_3[X] \mid \int_{-1}^1 P(x)e^{-x^2}dx = 0\}$;

Zadanie 16. Załóżmy, że $V_1, \dots, V_n$ są lnz, zaś $\{1, \dots, n\} = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$. Uzasadnij, że $\sum_{a \in A} V_a \cap \sum_{b \in B} V_b = \{0\}$.

Zadanie 17. Podaj przykład przestrzeni liniowej i jej czterech podprzestrzeni, z których każde trzy są lnz, ale wszystkie cztery nie są lnz.

Zadanie 18. Niech $W = W_1 \oplus W_2$. Rozstrzygnij czy dla każdego V zachodzi:

- $\text{Hom}(V, W) = \text{Hom}(V, W_1) \oplus \text{Hom}(V, W_2)$,
 - $\text{Hom}(W, V) = \text{Hom}(W_1, V) \oplus \text{Hom}(W_2, V)$.
- (W tym celu zinterpretuj najpierw składniki prawej strony jako podprzestrzenie lewej strony.)
Czy wszystko działa, gdy V, W nie są skończone wymiarowe?

Zadanie 19. Niech $A \in M_{n \times n}(K)$. Jakie są możliwe rzędy A^{adj} ? Czy aby wyznaczyć rząd A^{adj} wystarczy znać rząd A ?

Zadanie 20. Niech $A, B \in M_{n \times n}(K)$. Udowodnij, że:

- $(AB)^{\text{adj}} = B^{\text{adj}}A^{\text{adj}}$;
- $(A^{\text{adj}})^\top = (A^\top)^{\text{adj}}$;
- $(tA)^{\text{adj}} = t^{n-1}A^{\text{adj}}$;
- $(A^{\text{adj}})^{\text{adj}} = (\det(A))^{n-2}A$.

Zadanie 21. Podaj przykład przekształcenia liniowego F , takiego że $\chi_F(x) = 7 - 2x + 7x^2 - 4x^3 + x^4$.

Zadanie 22. Podaj przykład dwóch macierzy (kwadratowych, tego samego rozmiaru) o wyrazach w ciele 2-elementowym, których wielomiany charakterystyczne są różne, ale zadają tę samą funkcję na ciele 2-elementowym.

Zadanie 23. Niech F będzie skończonym zbiorem. Załóżmy, że każdemu jego podzbiorowi A jest przypisana podprzestrzeń V_A pewnej przestrzeni liniowej V , przy czym jeśli $A \subseteq B$, to $V_A \subseteq V_B$. Załóżmy wreszcie, że $V_F = V$. Niech V^A będzie podprzestrzenią V_A dopełniczą do $\sum_{B \subset A} V_B$. Czy jest prawdą, że $V = \bigoplus_{A \subseteq F} V^A$?

Zadanie 24. Niech F i G będą diagonalizowalnymi endomorfizmami V , które są przemienne: $F \circ G = G \circ F$. Udowodnij, że F i G dają się zdiagnozować we wspólnej bazie. (Tzn. istnieje baza V , której każdy wektor jest wektorem własnym zarówno F , jak i G .)

Zadanie 25. Załóżmy że B jest bazą Jordana dla F i G jednocześnie. Czy z tego wynika, że $F \circ G = G \circ F$?