

Na tej liście F jest endomorfizmem skończenie wymiarowej przestrzeni liniowej V . Przypomnienie: przestrzeń pierwiastkowa V^λ składa się z tych $v \in V$, że $(F - \lambda)^k(v) = 0$ dla pewnego k . Macierz jest nilpotentna gdy pewna jej potęga jest zerowa, podobnie endomorfizm.

Zadanie 1. Zbadaj diagonalizowalność macierzy:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix},$

b) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$

Zadanie 2. Udowodnij, że jeśli macierz górnotrójkątna ma parami różne wyrazy na przekątnej, to jest ona diagonalizowalna.

Zadanie 3. Znajdź postacie Jordana i bazy jordanowskie dla macierzy:

a) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Zadanie 4. Sprawdź, że przekształcenie $\mathbf{R}_n[X] \ni P \mapsto P' \in \mathbf{R}_n[X]$ jest nilpotentne (tzn. pewna jego potęga jest zerowa). Wyznacz jego postać Jordana i bazę jordanowską.

Zadanie 5. W turnieju tenisowym bierze udział 8 zawodników o numerach startowych od 1 do 8. Turniej jest rozgrywany systemem pucharowym. Po turnieju zdefiniowano macierz $A \in M_{8 \times 8}(\mathbf{R})$: $a_{ij} = 1$ jeśli i -ty zawodnik grał i wygrał z j -tym; $a_{ij} = 0$ w przeciwnym wypadku. Uzasadnij, że macierz A jest nilpotentna i wyznacz jej postać Jordana.

Zadanie 6. Niech F będzie endomorfizmem V , zaś B bazą V . Wykaż, że F jest diagonalizowalna $\iff m_B(F)$ jest diagonalizowalna.

Zadanie 7. Wykaż, że jeśli dla $G : V \rightarrow V$ mamy $\ker(G^k) = \ker(G^{k+1})$, to $V^0(G) = \ker(G^k)$. Wywnioskuj stąd, że jeśli dla $F : V \rightarrow V$ mamy $\ker((F - \lambda)^k) = \ker((F - \lambda)^{k+1})$, to $V^\lambda(F) = \ker((F - \lambda)^k)$.

Zadanie 8. Udowodnij, że jeśli N jest nilpotentnym endomorfizmem V , to liczba klatek $s \times s$ w postaci Jordana N wynosi $2 \dim \ker N^s - \dim \ker N^{s-1} - \dim \ker N^{s+1}$.

Zadanie 9. Podaj przykład macierzy $A \in M_{3 \times 3}(\mathbf{R})$, której żaden wyraz nie jest równy 0, ale $A^3 = 0$.

Zadanie 10. Uzasadnij, że jeśli $A \in M_{n \times n}(\mathbf{R})$ spełnia $A^{1000} = 0$, to również $A^n = 0$.

Zadanie 11. Załóżmy, że k jest liczbą naturalną, a $v \in V$ spełnia $F^k v \neq F^{k+1} v = 0$. Wykaż, że wtedy układ $(v, Fv, F^2v, \dots, F^k v)$ jest bazą niezmienniczej podprzestrzeni $V^0 \leq V$.

Zadanie 12. Uzasadnij, $\chi_F(x) = (-x)^n \iff F$ jest nilpotentne (gdzie $n = \dim V$).

Zadanie 13. Wyprowadź wzór na n -tą potęgę klatki Jordana $J_{\lambda,d} :=$

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & 0 \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \lambda & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & & \lambda \end{pmatrix}.$$

Zadanie 14. Wyznacz przestrzenie własne i przestrzenie pierwiastkowe odwzorowań F_A , dla $A =$

a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\text{d) } \begin{pmatrix} 6 & -9 & 5 & 4 \\ 7 & -13 & 8 & 7 \\ 8 & -17 & 11 & 8 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{e) } \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & 2 & -2 \\ -3 & 1 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Zadanie 15. Udowodnij, że jeśli $F, G : V \rightarrow V$, oraz $F \circ G = G \circ F$, to dowolna (a) przestrzeń własna $V_\lambda(F)$; (b) przestrzeń pierwiastkowa $V^\lambda(F)$; jest G -niezmiennicza.

Zadanie 16. Niech $F : V \rightarrow W$. Uzasadnij, że można dobrać bazy: B przestrzeni V i C przestrzeni W , tak aby $m_C^B(F)$ miała jedynki na miejscach $(1, 1), (2, 2), \dots, (k, k)$ (gdzie $k = \text{rk}(F)$), a zera na wszystkich pozostałych miejscach. Wywnioskuj, że jeśli $A \in M_{n \times m}(K)$, to istnieją odwracalne macierze $P \in M_{n \times n}(K)$, $Q \in M_{m \times m}(K)$, takie że $PAQ^{-1} \in M_{n \times m}(K)$ jest diagonalna (tzn. ma niezerowe wyrazy tylko na głównej przekątnej).

Zadanie 17. Udowodnij, że dla dowolnych $A, B \in M_{n \times n}(\mathbf{R})$ zachodzi $\chi_{AB}(x) = \chi_{BA}(x)$.

Zadanie 18. Niech N będzie nilpotentnym endomorfizmem V . Czy każdy niezerowy wektor z V jest elementem pewnej bazy jordanowskiej N ?

Zadanie 19. Niech A będzie macierzą 10×10 spełniającą $A^3 = 0$, zaś B niech będzie macierzą 10×10 której każdy wyraz jest równy 1. Udowodnij, że $\det(A + B) = 0$.

Zadanie 20. Udowodnij, że dowolne dwie odwracalne macierze zespolone tego samego rozmiaru można połączyć ciągłą krzywą odwracalnych macierzy zespolonych. Innymi słowy: dla dowolnych odwracalnych $A, B \in M_n(\mathbf{C})$ istnieją ciągłe funkcje $u_{ij} : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$, $w_{ij} : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$, takie że macierz $A(t) = (u_{ij}(t) + iw_{ij}(t)) \in M_n(\mathbf{C})$ jest odwracalna dla każdego $t \in [0, 1]$, a ponadto $A(0) = A$, $A(1) = B$.

(Wskazówka: pokaż, że macierz w postaci Jordana można połączyć z diagonalną, a diagonalną z identycznościową. Następnie rozważ $P^{-1}A(t)P$.)