

Zadanie 1. Ile jest możliwych postaci Jordana 6×6 z trzema wartościami własnymi?

Zadanie 2. Rozwiąż równania macierzowe: (a) $M^2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$; (b) $M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$.

Zadanie 3. Znajdź postacie Jordana (najlepiej nie wyznaczając baz jordanowskich) dla macierzy:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{c) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad \text{d) } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Zadanie 4. Wyznacz postacie Jordana i bazy jordanowskie dla macierzy z zadania 14 z listy 8.

Zadanie 5. Podaj przykład macierzy, której wielomian charakterystyczny to $x^2 - 12x + 36$, a wszystkie wektory własne są postaci $t \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$.

Zadanie 6. Znajdź postać Jordana macierzy A , wiedząc że $\chi_A(x) = (3-x)^4(2+x)$, $\text{rk}(A-3I) = 2$. Czy da się to zrobić, jeśli $\text{rk}(A-3I) = 1, 3, 4$?

Zadanie 7. Co wiadomo o postaci Jordana zespolonej macierzy A , jeśli: (a) $A^2 = I$; (b) $A^2 = A$; (c) $A^2 = A^3$

Zadanie 8. Udowodnij, że jeśli $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$, $A^N = I$, to A jest diagonalizowalna, a jej wartości własne są pierwiastkami z jedynki stopnia N .

Zadanie 9. Podaj przykład takiej macierzy $A \in M_{n \times n}(\mathbb{Z}_2)$ (o współczynnikach w ciele dwuelementowym) która ma postać Jordana and $\mathbb{Z}_2$, nie diagonalizuje się, ale spełnia $A^N = I$ dla pewnego N .

Zadanie 10. Załóżmy że V jest 5-wymiarową rzeczywistą przestrzenią liniową i $F \in \text{End}(V)$ ma postać Jordana

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

której odpowiada baza Jordanowska b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 .

Znajdź postać Jordana i bazę Jordanowską $2 \cdot F$ (podwojonego F).

Zadanie 11. Rzeczywista macierz A o wielomianie charakterystycznym $\chi_A(x) = (1-x)^5(2-x)$ spełnia:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}, (A-1)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}, (A-1)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Wyznacz postać Jordana i bazę Jordanowską dla A .

Zadanie 12. Przypomnij sobie, że liczba λ -klatek w postaci Jordana jest równa $\dim V_\lambda$. Niech

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$$

gdzie $a_1, \dots, a_n$ są pewnymi liczbami zespolonymi. Udowodnij, że w postaci Jordana macierzy A każdej wartości własnej odpowiada dokładnie jedna klatka Jordana.

Zadanie 13. Powiąż poprzednie zadanie z faktem, że jeśli mamy (liniowy) wzór rekurencyjny, taki że λ jest dokładnie k -krotnym jego pierwiastkiem równania charakterystycznego, to ciągi $\lambda^n, n\lambda^n, \dots, n^{k-1}\lambda^n$ (lub, jeśli wolisz, $\binom{n}{0}\lambda^{n-0}, \binom{n}{1}\lambda^{n-1}, \dots, \binom{n}{k-1}\lambda^{n-k+1}$) są dokładnie tymi fundamentalnymi rozwiązaniami danej rekurencji, w których występuje λ .

Zadanie 14. Dla wielomianu $P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ oraz $F : V \rightarrow V$ definiujemy $P(F) := a_0Id + a_1F + \dots + a_nF^n$.

- Udowodnij, że dla dowolnych dwóch wielomianów P, Q mamy $P(F) \circ Q(F) = Q(F) \circ P(F)$.
- Udowodnij, że jeśli $G : V \rightarrow V$, $F \circ G = G \circ F$, to dla dowolnego wielomianu P zachodzi $P(F) \circ G = G \circ P(F)$.

Zadanie 15. Z twierdzenia Jordana wywnioskuj twierdzenie Cayleya-Hamiltona, tzn. że dla $A \in M_{n \times n}(K)$, K algebraicznie domknięte, zachodzi $\chi_A(A) = 0$.

Zadanie 16. Udowodnij, że dowolny endomorfizm F zespolonej przestrzeni liniowej można przedstawić w postaci $S + N$, gdzie S, N są liniowe, S jest diagonalizowalne, N jest nilpotentne, oraz $S \circ N = N \circ S$. Czy przedstawienie takie jest jednoznaczne?

Zadanie 17. W założeniach i oznaczeniach poprzedniego zadania: udowodnij, że istnieją wielomiany P, Q , takie że $S = P(F)$, $N = Q(F)$.

Zadanie 18. Niech $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$. Udowodnij, że $A^n = 0 \iff \text{tr}(A) = \text{tr}(A^2) = \dots = \text{tr}(A^n) = 0$.