

Kombinatoryka, lista 3

Oznaczenia:

$|A|$ liczba elementów w zbiorze A , czyli moc zbioru A .

$[n]$ oznacza zbiór $\{1, 2, \dots, n\}$.

$\mathcal{S}_n$ rodzina wszystkich permutacji zbioru $[n]$, czyli bijekcji $\sigma : [n] \rightarrow [n]$.

$\mathcal{D}_n$ rodzina wszystkich nieporządków („derangements”) na zbiorze $\{1, 2, \dots, n\}$, czyli takich permutacji $\sigma \in \mathcal{S}_n$, że $\sigma_i \neq i$ dla każdego $i \in [n]$, jego moc oznaczmy przez $D_n := |\mathcal{D}_n|$.

Uwaga: w książce „Matematyka Konkretna” symbol $[p]$ oznacza „1” jeśli zdanie p jest prawdziwe i „0” jeśli p jest fałszywe: *nawias Iwersona (Iverson bracket)*.

Wyrazy ciągu $n!$ (A000142 w OEIS) dla $0 \leq n \leq 12$:

1, 1, 2, 6, 24, 120, 720, 5040, 40320, 362880, 3628800, 39916800, 479001600, ...

Wyrazy ciągu D_n (A000166 w OEIS) dla $0 \leq n \leq 12$:

1, 0, 1, 2, 9, 44, 265, 1854, 14833, 133496, 1334961, 14684570, 176214841, ...

Wyrazy ciągu $D_n/n!$ w przybliżeniu, dla $0 \leq n \leq 10$:

1, 0, 0.5, 0.333333, 0.375, 0.366667, 0.368056, 0.367857, 0.367882, 0.367879, 0.367879, ...

1. Udowodnij, że dla $n \geq 1$ zachodzi wzór *Cassiniego*:

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n. \quad (1)$$

2. Korzystając z poprzedniego zadania, udowodnij, że dla każdego $n \geq 1$ liczby F_{n-1}, F_n są względnie pierwsze.

3. Udowodnij, że dla każdego $n \geq 1$ zachodzi wzór:

$$\begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n.$$

Uzasadnij, że stąd wynika wzór *Cassiniego* (1).

4. Na ile sposobów możemy wejść na n schodów, jeśli w pojedynczym kroku możemy pokonać dowolną dodatnią liczbę schodków? Oznaczając liczbę tych sposobów przez a_n wyprowadź wzór rekurencyjny, a następnie spróbuj podać i udowodnić wzór na a_n .

5. Niech a_n oznacza liczbę sposobów podziału zbioru $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ na dwa niepuste podzbiory. Znajdź rekurencję dla liczb a_n , wylicz kilka pierwszych wyrazów i znajdź jawny wzór na a_n .

6. Niech a_n oznacza liczbę sposobów, na które możemy ułożyć z klocków wieżę wysokości n , jeśli mamy do dyspozycji klocki białe i czarne o wysokości 1 oraz klocki czerwone, zielone i żółte o wysokości 2. Wyprowadź wzór rekurencyjny na a_n i wyprowadź wzór jawny na a_n .

7. Podobnie jak poprzednio, a_n oznacza liczbę sposobów, na które możemy ułożyć z klocków wieżę wysokości n , ale tym razem mamy do dyspozycji klocki białe o wysokości 1 oraz klocki czarne, czerwone, niebieskie, zielone, żółte i różowe o wysokości 2. Wyprowadź wzór rekurencyjny na a_n oraz wzór jawny na a_n .

8. Ile dzielników ma liczba 108000?

9. Uzasadnij, że $|\mathcal{S}_0| = 1$ oraz że $|\mathcal{S}_n| = n \cdot |\mathcal{S}_{n-1}|$ dla $n \geq 1$.

10. Uzasadnij, że liczby D_n spełniają rekurencję: $D_0 = 1$, $D_1 = 0$,

$$D_n = (n-1)D_{n-1} + (n-1)D_{n-2}$$

dla $n \geq 2$.

11. Korzystając z poprzedniego zadania udowodnij, że dla $n \geq 1$ zachodzi równość

$$D_n = nD_{n-1} + (-1)^n.$$

12. Udowodnij wzór:

$$D_n = n! \cdot \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!}\right) = n! \cdot \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}.$$

13. Uzasadnij, że liczba takich permutacji $\sigma \in \mathcal{S}_n$, które mają dokładnie k punktów stałych (czyli takich, że $|\{i \in [n] : \sigma(i) = i\}| = k$) wynosi $\binom{n}{k} D_{n-k}$. Wyprowadź stąd równość:

$$\binom{n}{0} \cdot D_0 + \binom{n}{1} \cdot D_1 + \dots + \binom{n}{n} \cdot D_n = n!.$$

14*. Uzasadnij w elementarny sposób, że ciąg

$$a_n := 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!}$$

jest zbieżny, a jego granica g spełnia nierówność $\frac{1}{3} < g < \frac{1}{2}$.

15. Załóżmy, że $2 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_s$, przy czym $k_i + 2 \leq k_{i+1}$. Udowodnij, że wówczas

$$F_{k_1} + F_{k_2} + \dots + F_{k_s} < F_{k_s+1}.$$

Wskazówka: zastosuj indukcję ze względu na s .

16. Liczbę 100 można przedstawić jako sumę liczb Fibonacciego w następujący sposób:

$$100 = 3 + 8 + 89 = F_4 + F_6 + F_{11}.$$

Przedstaw w podobny sposób liczby 200, 300, 400, 500, przy czym mają być spełnione następujące warunki:

1. używamy liczb F_k dla $k \geq 2$,
2. każda liczba F_k może wystąpić w sumie co najwyżej raz,
3. jeśli w sumie występuje F_k to nie może wystąpić F_{k+1} .

17*. Udowodnij, że każdą liczbę naturalną można przedstawić w taki sposób (*reprezentacja Zeckendorfa* liczby naturalnej).

18*. Udowodnij, że każda liczba naturalna ma dokładnie jedną reprezentację Zeckendorfa.