

Kombinatoryka, lista 4

Wzór Sylwestera (zasada włączeń i wyłączeń): Jeśli $A_1, \dots, A_n$ są skończonymi zbiorami to

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}| \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{\substack{I \subseteq [n] \\ |I|=k}} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq [n]} (-1)^{|I|-1} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|. \end{aligned}$$

1. Podaj przykład liczby naturalnej n która ma dokładnie 24 dzielniki naturalne.
2. Podaj liczbę takich permutacji zbioru $[10] = \{1, 2, \dots, 10\}$ w których
 - a) liczby 5, 7 nie sąsiadują ze sobą;
 - b) liczby 2, 6, 4 występują obok siebie w porządku rosnącym.
 - c) spełnione są oba warunki.
3. Ile liczb naturalnych zapisanych za pomocą różnych cyfr można utworzyć z 1, 2, 3, 4, 5 oraz ile jest takich liczb mniejszych od 3 400?
4. Oblicz ile jest surjekcji
 - a) $f : [5] \rightarrow [3]$,
 - b) $f : [5] \rightarrow [4]$.
5. Ile jest punktów przecięcia jeśli mamy danych n różnych prostych na płaszczyźnie, z których żadne trzy nie tworzą pęku (nie przecinają się w jednym punkcie), jeśli
 - a) nie ma wśród nich prostych równoległych;
 - b) jest wśród nich k prostych równoległych.
6. W klasie jest $2n$ uczniów. Na ile sposobów możemy ich podzielić na n dwuosobowych zespołów? A jeśli jest $3n$ uczniów a zespoły są trzyosobowe?
7. Udowodnij, że

$$D_n = n! \cdot \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!} \right)$$

korzystając ze wzoru Sylwestera.

8. Ile jest liczb naturalnych $n \leq 10\,000$, które nie są podzielne przez 4, 5 ani przez 6?
9. Ile jest liczb naturalnych $n \leq 10\,000$, które nie są podzielne przez 4, 6, 7 ani przez 10?
10. Ile jest liczb naturalnych $n \leq 10\,000$, które nie są postaci k^2 ani k^3 , $k \in \mathbb{N}$?
11. Na ile sposobów możemy ze zbioru $[20] = \{1, 2, \dots, 20\}$ wybrać taki 3-elementowy podzbiór, który nie zawiera dwóch kolejnych liczb?

12. Mamy 6 różnych książek których autorem jest X , 7 autorstwa Y i 11 autorstwa Z . Na ile sposobów możemy wybrać dwie, tak aby miały różnych autorów?

13. Ile jest liczb 2-cyfrowych liczb parzystych? Ile 2-cyfrowych nieparzystych? Ile jest 2-cyfrowych liczb parzystych, przy czym cyfry są różne? Ile jest takich nieparzystych?

14. Na ile sposobów możemy wybrać hasło do komputera, jeśli ma się ono składać z jednej litery po której mają nastąpić 3 lub 4 różne cyfry?

15. Ile jest takich liczb naturalnych mniejszych od 100 000 które w zapisie dziesiętnym mają dokładnie jedną cyfrę 3, dokładnie jedną 4 i dokładnie jedną 5?

16. Ile jest 3-cyfrowych liczb naturalnych parzystych, które w zapisie dziesiętnym mają 3 różne cyfry?

17. Mamy dane dwa króle, biały i czarny, i szachownicę rozmiaru $m \times n$. Na ile sposobów możemy je ustawić na szachownicy tak aby nie stały na sąsiadujących polach?

18. W pudle mam 30 książek jednakowej wielkości, mam wybrać 5 spośród nich i ułożyć w rzędzie na półce. Na ile sposobów mogę to zrobić?