

Kombinatoryka, lista 6

1. Udowodnij poniższe wzory podając odpowiednią interpretację kombinatoryczną:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n, \quad (1)$$

$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1}, \quad (2)$$

$$\sum_{k=0}^n k(n-k) \binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2}, \quad (3)$$

$$\sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2}, \quad (4)$$

$$\sum_{i=0}^k \binom{m}{i} \binom{n}{k-i} = \binom{m+n}{k}, \quad (5)$$

$$\sum_{i=k}^n \binom{n}{i} \binom{i}{k} = \binom{n}{k} 2^{n-k}, \quad (6)$$

$$\sum_{i=0}^N \binom{k+i}{k} = \binom{k+N+1}{k+1}, \quad (7)$$

$$\sum_{k=3}^{n-2} \binom{k-1}{2} \binom{n-k}{2} = \binom{n}{5}. \quad (8)$$

2. Podaj wzory na poniższe sumy i uzasadnij je:

$$\sum_{k=1}^n k^3 \binom{n}{k}, \quad \sum_{k=1}^n k^2(n-k) \binom{n}{k}, \quad \sum_{j=k}^n \binom{j-1}{k-1}, \quad \sum_{k=4}^{n-4} \binom{k-1}{3} \binom{n-k}{4}.$$

3. Udowodnij tożsamość:

$$\sum_{i=k}^n \binom{n}{i} \binom{i}{k} s^{n-i} t^{i-k} = \binom{n}{k} (s+t)^{n-k}$$

dla $0 \leq k \leq n$, $s, t \in \mathbb{R}$.

4. Niech

$$a_{n,k}(s) := \begin{cases} \binom{n}{k} \cdot s^{n-k} & \text{jeśli } 0 \leq k \leq n, \\ 0 & \text{jeśli } n < k, \end{cases}$$

gdzie $s \in \mathbb{R}$, i niech $A(s)$ będzie macierzą $A(s) := [a_{n,k}(s)]_{n,k=0}^N$. Udowodnij, że

$$A(s) \circ A(t) = A(s+t),$$

gdzie symbol „ $\circ$ ” oznacza mnożenie macierzy. Zakładamy, że $1 \leq N \leq \infty$.

Uogólniony współczynnik dwumianowy jest zdefiniowany wzorem:

$$\binom{s}{k} := \frac{s(s-1)(s-2)\dots(s-k+1)}{k!},$$

gdzie $s \in \mathbb{R}$, k jest nieujemną liczbą całkowitą. Funkcja tworząca dla ciągu $\binom{s}{k}$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{s}{k} x^k = (1+x)^s.$$

5. Zapisz podane liczby bez użycia symbolu „ $\binom{\cdot}{\cdot}$ ”:

$$\binom{-5}{4}, \quad \binom{-1/3}{3}, \quad \binom{-1}{k}, \quad \binom{-5}{k}, \quad \binom{-1/2}{k}, \quad \binom{1/2}{k}, \quad \binom{1/5}{k}.$$

6. Udowodnij następujące równości dla uogólnionych współczynników dwumianowych:

$$\binom{s-1}{k} + \binom{s-1}{k-1} = \binom{s}{k}, \quad (9)$$

$$(-1)^k \binom{k-s-1}{k} = \binom{s}{k}, \quad (10)$$

$$\sum_{i=0}^k \binom{s}{i} \binom{t}{k-i} = \binom{s+t}{k}, \quad (11)$$

$$\sum_{i=0}^N \binom{s+i}{i} = \binom{s+N+1}{N}. \quad (12)$$

Można zastosować funkcje tworzące.

7. Dla $s \in \mathbb{R}$ wylicz funkcję tworzącą ciągu $\binom{k+s}{k}$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+s}{k} x^k.$$

8. Niech X będzie niepustym, skończonym zbiorem i niech $\mathcal{P}^p(X)$ (odpowiednio, $\mathcal{P}^{np}(X)$) oznacza rodzinę wszystkich podzbiorów zbioru X które mają parzystą (odpowiednio, nieparzystą) liczbę elementów. Wskaż dowolną bijekcję $\mathcal{P}^p(X) \rightarrow \mathcal{P}^{np}(X)$.

9*. Udowodnij, że dla $n \geq 0$, $s \in \mathbb{R}$ zachodzi wzór:

$$\sum_{k=0}^n c_k \binom{k+s+1}{n-k} (-1)^k = \binom{s}{n},$$

gdzie $c_k = \frac{1}{2k+1} \binom{2k+1}{k}$ - liczby Catalana. Wskazówka: użyj funkcji tworzących.