

## Kombinatoryka, lista 7

*Liczby Stirlinga pierwszego rodzaju:*  $\left[ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]$  to liczba podziałów zbioru  $\{1, 2, \dots, n\}$  na  $k$  cykli. Inaczej: liczba takich permutacji  $\sigma \in \mathcal{S}_n$ , które rozkładają się na  $k$  cykli rozłącznych (A132393 w OEIS).

*Liczby Stirlinga drugiego rodzaju:*  $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$  to liczba podziałów zbioru  $\{1, 2, \dots, n\}$  na  $k$  niepustych, rozłącznych podzbiorów. Inaczej: liczba takich relacji równoważności na zbiorze  $\{1, 2, \dots, n\}$ , które mają  $k$  klas abstrakcji (A048993 w OEIS).

*Liczba Bella*  $b_n$  to liczba wszystkich podziałów zbioru  $\{1, 2, \dots, n\}$  na niepuste podzbiory, czyli liczba *partycji* zbioru  $[n]$  (A000110 w OEIS). Możemy też powiedzieć, że  $b_n$  jest liczbą wszystkich możliwych relacji równoważności na zbiorze  $\{1, 2, \dots, n\}$ .

Liczbę spadków permutacji  $\sigma \in \mathcal{S}_n$  definiujemy jako moc zbioru  $\{i \in [n-1] : \sigma_i > \sigma_{i+1}\}$ . *Liczbę Eulera*  $\left\langle \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\rangle$  definiujemy jako liczbę takich permutacji  $\sigma \in \mathcal{S}_n$  które mają dokładnie  $k$  spadków (A173018 w OEIS).

Mamy zatem

$$\sum_{k=0}^n \left[ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right] = n!, \quad \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} = b_n, \quad \sum_{k=0}^n \left\langle \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\rangle = n!.$$

1. Wyraż wzorami liczby:  $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 1 \end{smallmatrix} \right\}$ ,  $\left[ \begin{smallmatrix} n \\ 1 \end{smallmatrix} \right]$ ,  $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ n \end{smallmatrix} \right\}$ ,  $\left[ \begin{smallmatrix} n \\ n \end{smallmatrix} \right]$ ,  $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ n-1 \end{smallmatrix} \right\}$ ,  $\left[ \begin{smallmatrix} n \\ n-1 \end{smallmatrix} \right]$ ,  $\left\langle \begin{smallmatrix} n \\ 1 \end{smallmatrix} \right\rangle$ ,  $\left\langle \begin{smallmatrix} n \\ n-1 \end{smallmatrix} \right\rangle$ ,  $\left\langle \begin{smallmatrix} n \\ n-2 \end{smallmatrix} \right\rangle$ .
2. Wyprowadź wzór rekurencyjny dla liczb  $a_n := \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 2 \end{smallmatrix} \right\}$  i  $b_n := \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 3 \end{smallmatrix} \right\}$ , przy czym przyjmujemy, że  $a_0 = a_1 = b_0 = b_1 = b_2 = 0$ , oraz wylicz funkcje tworzące

$$B(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} x^n, \quad C(x) = \sum_{n=3}^{\infty} \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 3 \end{smallmatrix} \right\} x^n.$$

3. Udowodnij, że liczby Bella spełniają następującą rekurencję:  $b_0 = 1$  i jeśli  $n \geq 1$  to

$$b_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} b_k.$$

4. Uzasadnij kombinatorycznie wzory:

$$\sum_{j=1}^{n-k+1} \binom{n}{j} (j-1)! \left[ \begin{smallmatrix} n-j \\ k-1 \end{smallmatrix} \right] = k \left[ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right],$$

$$\sum_{j=1}^{n-k+1} \binom{n}{j} \left\{ \begin{smallmatrix} n-j \\ k-1 \end{smallmatrix} \right\} = k \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}.$$

5. Uzasadnij wzory rekurencyjne dla liczb Stirlinga pierwszego rodzaju:  $\left[ \begin{smallmatrix} n \\ n \end{smallmatrix} \right] = 1$  dla  $n \geq 0$ ,  $\left[ \begin{smallmatrix} n \\ 0 \end{smallmatrix} \right] = 0$  dla  $n \geq 1$  i jeśli  $0 < k < n$  to

$$\left[ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right] = (n-1) \left[ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right] + \left[ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k-1 \end{smallmatrix} \right].$$

6. Uzasadnij wzory rekurencyjne dla liczb Stirlinga drugiego rodzaju:  $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ n \end{smallmatrix} \right\} = 1$  dla  $n \geq 0$ ,  $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 0 \end{smallmatrix} \right\} = 0$  dla  $n \geq 1$  i jeśli  $0 < k < n$  to

$$\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} = k \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right\} + \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k-1 \end{smallmatrix} \right\}.$$

7. Uzasadnij wzory rekurencyjne dla liczb Eulera:  $\langle \begin{smallmatrix} n \\ 0 \end{smallmatrix} \rangle = 1$  dla  $n \geq 0$ ,  $\langle \begin{smallmatrix} n \\ n \end{smallmatrix} \rangle = 0$  dla  $n \geq 1$ ,

$$\langle \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \rangle = (k+1) \left\langle \begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right\rangle + (n-k) \left\langle \begin{smallmatrix} n-1 \\ k-1 \end{smallmatrix} \right\rangle,$$

dla  $0 < k < n$ . Uzasadnij równość:  $\langle \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \rangle = \langle \begin{smallmatrix} n \\ n-1-k \end{smallmatrix} \rangle$ .

Wykładniczą funkcję tworzącą dla ciągu  $a_n$  definiujemy następująco:

$$A(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n.$$

8. Wylicz wykładniczą funkcję tworzącą a) dla ciągu  $a_n := n!$ , b) dla ciągu  $D_n$ , gdzie  $D_n$  oznacza liczbę nieporządków w  $S_n$ . Wskazówka: skorzystaj z zadania 11 z listy 3.

9. Korzystając z zadania 3 udowodnij, że wykładnicza funkcja tworząca liczb Bella

$$B(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} x^n$$

spełnia równanie:  $B'(x) = e^x \cdot B(x)$ . Czy potrafisz stąd wyliczyć wzorem funkcję  $B(x)$ ?

10. Niech  $P_n(t)$ ,  $Q_n(t)$ ,  $E_n(t)$  będą funkcjami tworzącymi  $n$ -tego wiersza liczb Stirlinga pierwszego i drugiego rodzaju oraz dla liczb Eulera:

$$P_n(t) := \sum_{k=0}^n \left[ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right] t^k, \quad Q_n(t) := \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} t^k, \quad E_n(t) := \sum_{k=0}^n \left\langle \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\rangle t^k.$$

Sprawdź, że dla  $n \geq 1$  zachodzą wzory:

$$\begin{aligned} P_n(t) &= (n-1+t) \cdot P_{n-1}(t), \\ Q_n(t) &= t \cdot Q_{n-1}(t) + t \cdot Q'_{n-1}(t), \\ E_n(t) &= ((n-1)t+1) E_{n-1}(t) + t(1-t) E'_{n-1}(t). \end{aligned}$$

Potęgi kroczące definiujemy następująco:

$x^{\bar{n}} := x(x+1)(x+2) \dots (x+n-1)$  potęga rosnąca,

$x^{\underline{n}} := x(x-1)(x-2) \dots (x-n+1)$  potęga malejąca.

11. Sprawdź wzór:  $x^{\underline{n}} = (-1)^n (-x)^{\bar{n}}$ .

12. Udowodnij tożsamości:

$$\begin{aligned} x^{\bar{n}} &= \sum_{k=0}^n \left[ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right] x^k, & x^{\underline{n}} &= \sum_{k=0}^n \left[ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right] (-1)^{n-k} x^k, \\ x^{\underline{n}} &= \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} x^{\underline{k}}, & x^{\bar{n}} &= \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} (-1)^{n-k} x^{\bar{k}}. \end{aligned}$$