

Kombinatoryka, lista 8

Grafem nazywamy parę $G = (V, E)$, gdzie V jest dowolnym zbiorem, a E jest pewną rodziną 2-elementowych podzbiorów V (czyli $E \subseteq \mathcal{P}_2(V)$). Elementy V nazywamy *wierzchołkami*, a elementy E nazywamy *krawędziami*. Moc zbioru V nazywamy *rzędem* grafu G .

Jeśli $e = \{v_1, v_2\} \in E$ to mówimy, że v_1, v_2 są *końcami* krawędzi e , oraz że wierzchołki v_1, v_2 są *połączone*. *Rzędem* wierzchołka v_0 , $\deg(v_0)$, nazywamy moc zbioru wszystkich krawędzi, dla których v_0 jest końcem, czyli moc zbioru $\{v \in V : \{v_0, v\} \in E\}$.

Jeśli $G = (V, E)$ jest grafem rzędu n , $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, to *ciąg rzędów wierzchołków* grafu G definiujemy jako $(\deg(v_1), \deg(v_2), \dots, \deg(v_n))$, przy czym zwykle ustawiamy te liczby w porządku nierosnącym.

Ciąg wierzchołków $(v_0, v_1, \dots, v_r)$, $r \geq 0$, nazywamy *ścieżką długości r* jeśli ciąg ten jest różnowartościowy oraz $\{v_{i-1}, v_i\} \in E$ dla $i = 1, 2, \dots, r$.

Ciąg wierzchołków $(v_0, v_1, \dots, v_r)$, $r \geq 3$, nazywamy *cyklem długości r* jeśli ciąg $(v_1, \dots, v_r)$ jest różnowartościowy, $v_0 = v_r$ oraz $\{v_{i-1}, v_i\} \in E$ dla $i = 1, 2, \dots, r$.

Mówimy, że graf $G = (V, E)$ jest *spójny* jeśli dla każdych $x, y \in V$ istnieje ścieżka $(v_0, v_1, \dots, v_r)$ taka, że $v_0 = x$, $v_r = y$, czyli ścieżka o początku x i końcu y .

Dla grafu spójnego $G = (V, E)$ i dla wierzchołków $x, y \in V$ definiujemy ich odległość $d(x, y) \geq 0$ jako najmniejsze r takie, że istnieje ścieżka długości r o początku x i końcu y .

Mówimy, że graf G jest *drzewem* jeśli jest spójny i nie zawiera cykli.

Mówimy, że graf $G = (V, E)$ jest *dwudzielny* jeśli istnieją podzbiory $V_1, V_2 \subseteq V$ takie, że $V_1 \cup V_2 = V$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ oraz każda krawędź $e \in E$ jest postaci $e = \{v_1, v_2\}$ dla pewnych $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$.

W zadaniach będziemy zakładać, że $G = (V, E)$ jest grafem *skończonego rzędu*.

1. Sprawdź czy istnieje graf o danym ciągu rzędów wierzchołków:

$$\begin{aligned} &(1, 1, 0, 0), \quad (3, 3, 3, 1), \quad (1, 1, 1, 1), \quad (1, 1, 1, 0), \quad (2, 2, 1, 1), \quad (3, 3, 3, 3), \\ &(2, 2, 2, 2, 2), \quad \underbrace{(2, \dots, 2)}_{k \text{ razy}}, \quad (3, \underbrace{2, \dots, 2}_k, 1), \quad (3, 3, 3, 3, 3), \quad (3, 3, 3, 3, 3, 3), \\ &(3, 3, 2, 2, 1, 1), \quad (3, 3, 2), \quad (3, 3, 2, 2), \quad (3, 3, 2, 2, 2), \quad (3, 3, \underbrace{2, \dots, 2}_k). \end{aligned}$$

2. Udowodnij, że jeśli graf $G = (V, E)$ ma rząd n to $|E| \leq \binom{n}{2}$.

3. Udowodnij, że

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2 \cdot |E|.$$

4. Udowodnij, że jeśli dla każdego $v \in V$ mamy $\deg(v) \geq 2$ to G zawiera cykl.

5. Udowodnij, że jeśli graf $G = (V, E)$ rzędu n jest drzewem to $|E| = n - 1$.

6. Załóżmy, że graf $G = (V, E)$ jest spójny. Udowodnij, że wówczas istnieje taki podzbiór $E_0 \subseteq E$, że graf (V, E_0) jest drzewem (drzewo *rozpinające* graf G).

7. Udowodnij, że jeśli graf spójny $G = (V, E)$ jest rzędu n i $|E| = n - 1$ to G jest drzewem.

8. Udowodnij, że graf $G = (V, E)$ jest dwudzielny wtedy i tylko wtedy gdy nie zawiera cyklu długości nieparzystej.

9. Udowodnij, że w grafie istnieją dwa wierzchołki które mają ten sam rząd.

10. Udowodnij, że jeśli graf $G = (V, E)$ rzędu n jest spójny to $|E| \geq n - 1$.

11*. Udowodnij, że jeśli graf $G = (V, E)$ ma rząd n i $|E| > \binom{n-1}{2}$ to G jest spójny.

Wskazówka: najpierw udowodnij, że jeśli $2 \leq k \leq n - 2$ to $\binom{k}{2} + \binom{n-k}{2} \leq \binom{n-1}{2}$.

12. Udowodnij, że każde drzewo jest grafem dwudzielnym.

13. *Kostkę d -wymiarową* nazywamy graf postaci $G = (V, E)$, gdzie $V := \{0, 1\}^d$, a ciągi $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)$, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_d) \in \{0, 1\}^d$ tworzą krawędź wtedy i tylko wtedy, gdy różnią się dokładnie na jednym miejscu, czyli gdy $|\{i : x_i \neq y_i\}| = 1$.

1) Sprawdź, że dla $d = 3$ otrzymany graf jest szkieletem sześciangu. 2) Ile jest wierzchołków i ile jest krawędzi w G ? 3) Jak wygląda ciąg rzędów wierzchołków w G ? 4) Czy G jest dwudzielny?

Zadania uzupełniające do listy 7, nieobowiązkowe

1. Udowodnij, że jeśli $0 \leq k \leq n$ to

$$\sum_{j=k}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ j \end{matrix} \right\} \left[\begin{matrix} j \\ k \end{matrix} \right] (-1)^{n-j} = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } k = n, \\ 0 & \text{jeśli } k \neq n. \end{cases}$$

Jak można „macierzowo” interpretować ten wzór?

2. Niech $S_n(x) := \sum_{k=1}^{\infty} k^n x^k$. Udowodnij, że $S_n(x) = x S'_{n-1}(x)$.

3. Udowodnij że dla $n = 0, 1, 2, \dots$ mamy

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^n x^k = \frac{x \cdot E_n(x)}{(1-x)^{n+1}},$$

gdzie $E_n(x)$ oznacza n -ty wielomian Eulera.

Wskazówka: skorzystaj z poprzedniego zadania i ze wzoru rekurencyjnego na $E_n(x)$.

4. Sprawdź, że wielomian Stirlinga drugiego rodzaju $Q_3(t)$ ma 3 pierwiastki rzeczywiste, $s_1 < s_2 < s_3 = 0$.

Udowodnij, że wielomian $Q_4(x)$ ma 4 pierwiastki rzeczywiste $t_1, t_2, t_3, t_4 = 0$, przy czym $t_1 < s_1 < t_2 < s_2 < t_3 < 0 = s_3 = t_4$.

5. Sprawdź, że wielomian Eulera $E_3(t)$ ma 2 pierwiastki rzeczywiste, $s_1 < s_2 < 0$.

Udowodnij, że wielomian $E_4(x)$ ma 3 pierwiastki rzeczywiste t_1, t_2, t_3 , przy czym $t_1 < s_1 < t_2 < s_2 < t_3 < 0$.

6*. Udowodnij indukcyjnie, że $Q_n(x)$ ma n pierwiastków rzeczywistych $t_1, t_2, \dots, t_n$, przy czym $t_1 < t_2 < \dots < t_n = 0$.

7*. Udowodnij indukcyjnie, że $E_n(x)$ ma $n - 1$ pierwiastków rzeczywistych $t_1, t_2, \dots, t_{n-1}$, przy czym $t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < 0$.

8. Sprawdź, że $\binom{k}{2} + \binom{k}{1} = k^2$. Korzystając z wcześniejszych wzorów wyprowadź wzór na sumę

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2.$$

9. Znajdź takie liczby a, b, c , że

$$a \binom{k}{3} + b \binom{k}{2} + c \binom{k}{1} = k^3.$$

Podobnie jak w poprzednim zadaniu wyprowadź wzór na sumę

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3.$$