

Kombinatoryka, lista 9

Zakładamy, że $G = (V, E)$ jest grafem skończonym, spójnym, $d(u, v)$ oznacza odległość wierzchołków u, v w G . Jeśli $\{u, v\} \in E$ to mówimy, że wierzchołki u, v są *sąsiednie*. Piszemy wówczas $u \sim v$.

Średnicą grafu G nazywamy maksymalną odległość dwóch wierzchołków w G :

$$\text{diam}(G) := \max\{d(u, v) : u, v \in V\}.$$

Dla ustalonej krawędzi $e_0 \in E$ symbolem $G - e_0$ będziemy oznaczać graf $(V, E \setminus \{e_0\})$. Krawędź $e_0 \in E$ będziemy nazywać *mostem* jeśli $G - e_0$ jest niespójny.

Dla ustalonego wierzchołka $v_0 \in V$ symbolem $G - v_0$ będziemy oznaczać graf (V_0, E_0) , gdzie

$$V_0 := V \setminus \{v_0\}, \quad E_0 := \{e \in E : v_0 \notin e\}.$$

Wierzchołek $v_0 \in V$ nazywamy *rozcinającym* jeśli graf $G - v_0$ jest niespójny.

Wierzchołek $v_1 \in V$ nazywamy *peryferyjnym* jeśli istnieje $v_2 \in V$ taki, że $d(v_1, v_2) = \text{diam}(G)$. Oczywiście wówczas wierzchołek v_2 jest też peryferyjny.

Pełny graf rzędu n , to graf $K_n := (V, E)$, gdzie

$$|V| = n, \quad E := \{\{u, v\} : u, v \in V, u \neq v\}.$$

Pełny graf dwudzielny $K_{m,n}$ to graf postaci (V, E) , gdzie

$$V = V_1 \dot{\cup} V_2, \quad |V_1| = m, \quad |V_2| = n, \quad E := \{\{u, v\} : u \in V_1, v \in V_2\}.$$

Funkcję $c : V \rightarrow [k]$ nazywamy *kolorowaniem grafu* $G = (V, E)$ jeśli dla każdego $e = \{x, y\} \in E$ mamy $c(x) \neq c(y)$. Liczbę takich funkcji oznaczamy $P_G(k)$, jest to *wielomian chromatyczny* grafu G . Najmniejszą liczbę k dla której taka funkcja c istnieje nazywamy *liczbą chromatyczną* grafu G i oznaczamy $\chi(G)$.

1. Dany jest graf $G = (V, E)$, $|V| = 9$, $|E| = 20$. Udowodnij, że istnieje taki wierzchołek $v_0 \in V$, że $\deg(v_0) \geq 5$.

2. Udowodnij, że jeśli w drzewie jest wierzchołek rzędu $d \geq 2$ to drzewo ma co najmniej d liści, czyli wierzchołków rzędu 1.

3. Dla $2 \leq k \leq n$ podaj przykład grafu rzędu n , który ma dokładnie k wierzchołków peryferyjnych, a wszystkie pozostałe są rozcinające.

4. Udowodnij, że wierzchołek peryferyjny nie jest rozcinający.

5. Udowodnij, że krawędź jest mostem wtedy i tylko wtedy gdy nie leży w żadnym cyklu.

6. Udowodnij, że w każdym grafie spójnym rzędu $n \geq 2$ są co najmniej dwa wierzchołki, które nie są rozcinające.

7. Naskicuj drzewo, dla którego ciąg Prüfera jest równy: $(3, 5, 4, 10, 3, 2, 2, 5)$.

8. Ile jest drzew na zbiorze $V = [10]$, dla których wierzchołek 2 ma rząd 3 a wierzchołek 4 ma rząd 5? Podaj przykład takiego drzewa.

9. Ile jest takich drzew na zbiorze $V = [10]$ dla których wierzchołki 7, 8, 9, 10 są liśćmi?

10. Ile jest drzew na zbiorze $V = [n]$, dla których $\deg(1) = n - 2$?

11. Jak wygląda drzewo którego ciąg Prüfera jest różnowartościowy?

12. Sprawdź, czy dany ciąg jest ciągiem rzędów wierzchołków pewnego grafu G . Jeśli tak to naszkicuj przykładowy graf:

$$(6, 6, 5, 3, 2, 2, 1, 1), \quad (4, 3, 3, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1), \quad (5, 4, 3, 3, 3, 3, 3, 2, 2), \quad (6, 5, 4, 4, 4, 3).$$

Czy G może być drzewem? Czy G może być planarny?

13. Graf $G = (V, E)$ nazywamy *unicyklicznym* jeśli $|E| = |V|$. Opisz rodzinę spójnych grafów unicyklicznych.

14. Znajdź wielomian chromatyczny dla: drzewa rzędu n , grafu pełnego K_n , grafu $K_{3,2}$.

15. Udowodnij, że wielomian chromatyczny cyklu C_n jest równy $(k-1)^n + (-1)^n(k-1)$.

16. Dla grafu $G = (V, E)$, gdzie $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, jego *Mycielskian* $M(G) = (V_1, E_1)$ jest grafem zdefiniowanym następująco zdefiniowany następująco:

$$V_1 := \{v_1, v_2, \dots, v_n, u_1, u_2, \dots, u_n, w\},$$

$$E_1 := E \cup \{\{v_i, u_j\} : \{v_i, v_j\} \in E\} \cup \{\{u_i, w\} : i = 1, 2, \dots, n\}.$$

a) Załóżmy, że $(d_1, d_2, \dots, d_n)$ jest ciągiem rzędów wierzchołków grafu G . Jak wygląda ciąg rzędów wierzchołków dla $M(G)$?

b) Czy prawdą jest, że jeśli G jest spójny to $M(G)$ jest spójny?

c) Czy prawdą jest, że jeśli G jest niespójny to $M(G)$ jest niespójny?

d) Udowodnij, że liczba chromatyczna dla $M(G)$ jest o jeden większa niż dla G .

e) Udowodnij, że jeśli w grafie G nie ma trójkątów to również w $M(G)$ nie ma trójkątów.

17. Dla $0 < k < n$ graf Johnsona $J(n, k)$ zdefiniowany jest następująco: wierzchołkami są wszystkie k -elementowe podzbiory zbioru $[n]$, czyli $V := \mathcal{P}_k([n])$, a para $\{A, B\}$ jest krawędzią wtedy i tylko wtedy, gdy $|A \cap B| = k - 1$.

a) Naszkicuj $J(4, 1)$, $J(4, 2)$. Jak wygląda graf $J(n, 1)$?

b) Jaki jest rząd grafu $J(n, k)$?

c) Czy $J(n, k)$ jest zawsze spójny?

d) Udowodnij, że grafy $J(n, k)$ i $J(n, n - k)$ są izomorficzne.

e) Jaki jest rząd wierzchołka w $J(n, k)$?

f) Jaka jest średnica $J(n, k)$?

18*. O grafie $G = (V, E)$ zakładamy, że $|V| = 99$ oraz

- każde dwa sąsiadujące wierzchołki mają dokładnie jednego wspólnego sąsiada,
- każde dwa niesąsiadujące wierzchołki mają dokładnie dwóch wspólnych sąsiadów.

Udowodnij, że każdy wierzchołek w G ma rząd parzysty.

Zakładając, że wszystkie wierzchołki mają taki sam rząd d , oblicz d .

Istnienie takiego grafu jest otwartym problemem, postawionym oficjalnie w 2014 roku przez Johna Hortona Conway'a, który za jego rozwiązanie ufundował nagrodę wysokości 1000\$ („Conway's 99-graph problem”).